

三杆结构的塑性极限分析

中国农业大学理学院 张家瑞

2023年3月

一、引言

在三杆结构中，当两根杆达到塑性变形时，结构变为机构并且不能再承受更大的力。在本文中，我们将研究三杆结构系统中，结点处作用力沿不同方向时，对应能够承受最大的力以及哪两根杆先进入塑性变形也不同。在我们传统认知中，是看各杆在力的方向投影来判断哪两根杆先达到屈服，投影越大，说明承担的力就越大，那么这种方法是否正确呢？在本文中将对对此问题展开讨论。在本文中假设材料都为理想塑性材料，角度采用角度制。为了方便计算，在此定义 $\sigma_s A = 1$ 。

模型如下图所示，本文中考虑 $\theta = 45^\circ$ 的情况。

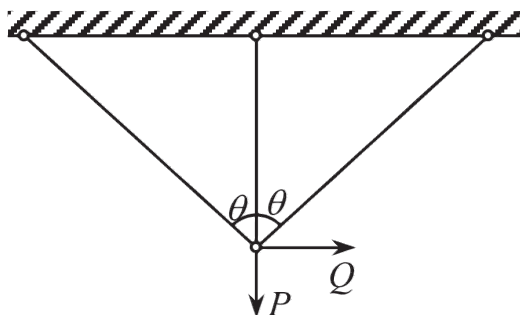


图 1: 三杆结构图，其中 $\theta = 45^\circ$ ，从左至右分别为1、2、3杆。

二、几种特殊情况的分析

我们记 $\phi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right)$ ，且 $\phi \in [0, 90]$ ，合力 $F = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ，先来讨论几种特殊的情况：

1、 $\phi = 0^\circ$ ，即 $Q = 0$ 。

此时，只有纵向力 P 作用，则1、2、3杆受拉，且同时达到塑性极限，有

$$P = 1 + \sqrt{2}, \quad (1)$$

$$Q = 0, \quad (2)$$

$$F = 1 + \sqrt{2}, \quad (3)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_s. \quad (4)$$

2、 $\phi = 45^\circ$ ，即 $Q = P$ 。

此时，1、2杆受拉，3杆受压，1、2杆达到塑性极限，有

$$P = Q = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad (5)$$

$$F = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (6)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s, \quad (7)$$

$$\sigma_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_s. \quad (8)$$

3、 $\phi = 54.7^\circ$ ，即 $Q = \sqrt{2}P$ 。

此时，1、2杆受拉，3杆受压，且同时达到塑性极限，有

$$P = 1, \quad (9)$$

$$Q = \sqrt{2}, \quad (10)$$

$$F = \sqrt{3}, \quad (11)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s, \quad (12)$$

$$\sigma_3 = -\sigma_s. \quad (13)$$

4、 $\phi = 63.43^\circ$ ，即 $Q = 2P$ 。

此时，1、2杆受拉，3杆受压，1、3杆达到塑性极限，有

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (14)$$

$$Q = \sqrt{2}, \quad (15)$$

$$F = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad (16)$$

$$\sigma_1 = \sigma_s, \quad (17)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_s, \quad (18)$$

$$\sigma_3 = -\sigma_s. \quad (19)$$

5、 $\phi = 90^\circ$ ，即 $P = 0$ 。

此时，只有横向力 Q 作用，则1杆受拉，2杆不受力，3杆受压，1、3杆达到塑性极限，有

$$P = 0, \tag{20}$$

$$Q = \sqrt{2}, \tag{21}$$

$$F = \sqrt{2}, \tag{22}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3, \tag{23}$$

$$\sigma_2 = 0, \tag{24}$$

$$\sigma_3 = -\sigma_s. \tag{25}$$

在我们传统认知中，是看各杆在力的方向投影来判断哪两根杆先达到屈服，我们可以通过建立坐标系求向量点积的绝对值来算出哪个杆在力的方向上投影大，即假设1杆向量为 $(-1, 1)$ ，2杆向量为 $(0, \sqrt{2})$ ，3杆向量为 $(1, 1)$ ，然后分别与力的方向向量 $(\sin \phi, -\cos \phi)$ 做点积。这在大多数情况下会成立，然而通过上述的例4可以发现，当 $Q = 2P$ 时，有力的方向向量为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ ，经过点积后我们发现1、2杆的投影更大一些，这样的话1、2杆应先达到塑性极限，但与前面求解内容矛盾。因此这种所谓的直接判断方法是不正确的。

三、数值计算

我们为了更好的研究每个力在各个方向时，哪几根杆先达到塑性极限，因此采用数值计算方法进行研究。

我们首先看一下力在各个方向时候的各杆沿力方向的投影：

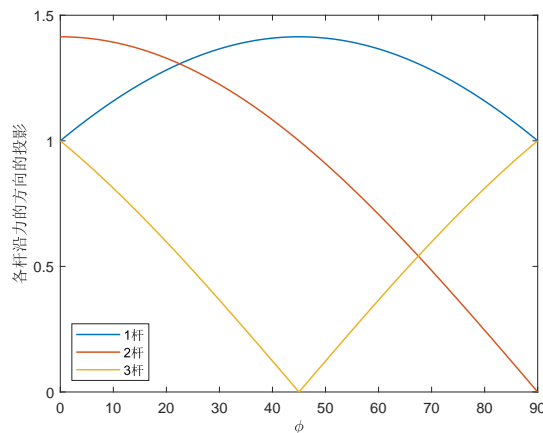


图 2: 当力沿不同方向时，各杆沿力方向的投影大小。

我们可以得到，当 $0^\circ < \phi < 67.5^\circ$ 时，杆1、2在力的方向投影大；当 $67.5^\circ < \phi < 90^\circ$ 时，杆2、3在力的方向投影大。

综合上一节的研究，我们可以判断出无论力沿着哪个方向，当三杆结构达到塑性极限时，1杆也是处于受拉的塑性极限。因此，我们可以通过假设1杆达到塑性极限，分别计算2、3杆也达到塑性极限时合力 F 的大小来判断是哪根杆先达到塑性极限。

我们可以列出方程：

$$F_{12} \cos(45 - \phi) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (26)$$

$$F_{13} \sin \phi = \sqrt{2}. \quad (27)$$

其中 F_{12} 为1、2杆达到塑性极限时对应的合力，其中 F_{13} 为1、3杆达到塑性极限时对应的合力，作图如下：因为在 ϕ 较小时， F_{13} 趋于无穷大，显然为1、2杆先达到屈服，这段就不再考虑。

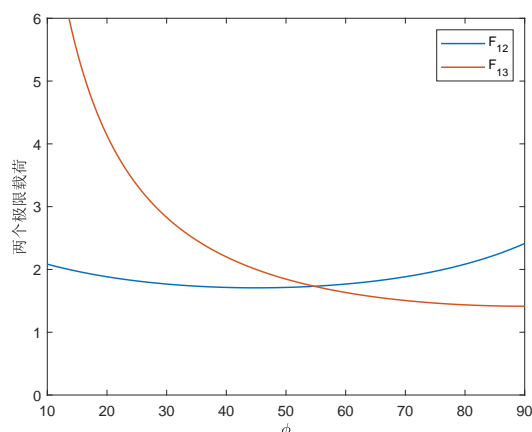


图 3: 当力沿不同方向时，各杆沿力方向的投影大小。

我们可以发现，在 $\phi = 54.7^\circ$ 时， F_{12} 等于 F_{13} ，此时三杆同时达到塑性极限，与前文中讨论结果一致。

所以我们可以得到，当 $\phi = 0^\circ$ 时，三杆同时达到塑性极限； $0^\circ < \phi < 54.7^\circ$ 时，1、2杆先达到塑性极限；当 $\phi = 54.7^\circ$ 时，三杆同时达到塑性极限；当 $54.7^\circ < \phi \leq 90^\circ$ 时，1、3杆先达到塑性极限。在这个过程中，1、2杆始终受拉，3杆先受拉再受压，且很容易知道3杆的拉压界限为 $\phi = 22.5^\circ$ 。

四、总结

综上所述，我们可以得到，当 $54.7^\circ < \phi < 67.5^\circ$ 时，使用看各杆在力的方向投影来判断哪两根杆先达到屈服这个方法是错误的，而当 $P = 2Q$ 时，恰好 $\phi = 63.43^\circ$ 处于这个区间中，所以得到了错误的答案。而在此区间之外，使用该方法是正确的。

而出现这种现象的原因，是因为在这个区间中，3杆为压杆，我们考虑沿着垂直1杆的方向将力进行分解，就会发现，尽管2能够承担的更多，但在垂直于杆1方向的分量是与力同向的，而3杆为反向的，因此这时候需要考虑3杆是否达到了压缩塑性极限。