压杆断裂强度与稳定性关系的分析

中国农业大学理学院　张家瑞

2022年10月

一、引言

对于工程构件，在其承受载荷的情况下，为了保证工程结构或机械的正常工作，需要满足强度、刚度、稳定性要求。压杆作为一种主要承受轴向应力的杆件，在工程中有着很广泛的应用。因此对于压杆的研究有着重要的意义。

我们可以把断裂和出现塑性变形统称为失效，对于受压短杆，当杆的强度不足时，会出现压溃现象，这是失效的一种。受压细长杆的被压弯，则是稳定性不足引起的失效。此外，还有不同的加载方式、不同的工作环境条件等也会导致失效。在此我们只讨论压杆的断裂强度和稳定性。

在本文中，我们通过引入压杆的压缩强度与拉伸强度、拉伸强度与比例极限之间的关系，将物理量联系起来，建立相关方程并得到了判断断裂与屈服两者发生顺序的方法。

二、压杆的断裂强度

通过试验我们可以得知，对于低碳钢等塑性材料，在压缩时的弹性模量E与屈服强度σ_s，都与拉伸时大致相同。在屈服阶段后，随着试样越压越扁，横截面面积不断增大，试样抗压能力也继续增高，因而得不到压缩时的强度极限。

对于铸铁等脆性材料，在压缩时会在较小的变形下突然破坏。由于压缩试验中，破坏断面的法线与试件轴线大致成$45^\circ \sim 55^\circ$的倾角，表明试样沿斜截面因相对错动而破坏。对于铸铁，有

$$\sigma_b^c = (4 \sim 5)\sigma_b^t, \tag{1}$$

其中σ_b^c为压缩强度,σ_b^t为拉伸强度。

对于脆性材料，我们可以通过拉伸强度来近似得到压缩强度，在脆性材料两端受到载荷

时，我们可以得到应力张量：

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

因此，应变张量为

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\epsilon \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中ν为泊松比，ϵ为受压方向的应变。

根据第二强度理论，当最大正线应变$-\nu\epsilon$达到最大线应变$\dfrac{\sigma_b^t}{E}$时，再根据胡克定律

$$\epsilon = \frac{1}{E}[0 - \nu(-\sigma + 0)] = \frac{\nu\sigma}{E}, \tag{4}$$

可得

$$\sigma_b^t = \nu\sigma_b^c, \tag{5}$$

我们可以据此近似得到脆性材料中拉伸强度与压缩强度的关系。

三、压杆稳定

长度较小的受压杆件，在其是假的应力大于强度极限时，会出现断裂，这是由于强度不足引起的失效。但对于细长杆件受压时，会表现出另外一种性质，即失稳，也叫屈服。

在判断压杆稳定性时，我们引入了柔度的概念，即

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \tag{6}$$

其中l为杆长，i为截面的惯性半径，μ为长度因数，对于两端固定压杆有$\mu = 0.5$。 当临界应力小于比例极限时候，材料服从胡克定律，我们有临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{7}$$

同时我们可以利用上式得出该公式的适用条件

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}, \tag{8}$$

需要注意的是，当λ不再这个范围内，我们需要使用经验公式进行计算，即直线公式或抛物线公式，其表达式分别为

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \tag{9a}$$

$$\sigma_{cr} = a_1 - b_1\lambda^2, \tag{9b}$$

对于脆性材料，由脆性材料实验所得的应力-应变图中，没有明显的比例极限。然而，在小应力范围内，可以近似地认为应力-应变是呈线性分布的，同时，可设近似比例极限值为σ_{cp}，在这种条件和范围内，我们可以看作欧拉公式依然成立。进而得到脆性材料的临界应力。

四、压杆断裂与屈服的判断

对于塑性材料制成的压杆，我们有关于某些材料的拉伸强度极限与比例极限的关系式。但是由于考虑到其压缩过程中断裂的复杂性，故在此不做考虑。

对于脆性材料制成的压杆，由于在脆性材料拉伸时，其应力-应变曲线随变化较小，我们可以假设其拉伸强度极限与比例极限相等，即

$$\sigma_b^t = \sigma_p, \tag{10}$$

那么根据前面的知识，杆件发生断裂与屈服的先后顺序即为随着施加应力σ的增加，σ首先达到压缩断裂强度极限$\sigma_b^c = \dfrac{\sigma_b^t}{\nu}$还是屈服临界应力$\sigma_{cr}$，这与材料的性质有着很大的关联。我们引入

$$\Delta = \sigma_p - \nu\sigma_{cr}, \tag{11}$$

当$\Delta > 0$时，首先发生屈服；当$\Delta < 0$，首先发生断裂。我们可以利用此进行简单的判断。

五、总结

在此报告中，我们介绍了压杆的断裂强度与稳定性的相关知识，但就材料而言，由于缺少强度极限σ_b与比例极限σ_p的定量关系，因此无法直接的进行相关的理论计算。但是对于脆性材料，我们通过假设二者之间的关系，进而得到了近似判断因子$\Delta = \sigma_p - \nu\sigma_{cr}$。

当然可以通过有限元等数值模拟或试验来做出更加准确的判断，进而与理论相互印证，但限于能力，暂述于此。

参考文献：

[1] 刘鸿文. 材料力学（上册）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[2] 程沅生. 某些脆性材料的抗压强度与抗拉强度之间的一个近似关系式 [J]. 理化检验, 1981.

[3] 张晓梅, 史建栋. 服性材料的临界应力计算 [J]. 山西煤炭, 06, 1994.

[4] 郭小璇. 铝和铝合金材料拉伸时比例极限与抗拉强度的关系及屈服强度的测定 [J]. 轻合金加工技术, 21, 1993.