

# 张家瑞 2401111734 HW1

## 题 1.1

在一个已经赋予了各向异性本构但主轴方向未知的材料域  $\Omega$  上，要确定 9 个独立的材料参数以及主轴方向。

由于主轴方向未知，首先在全局坐标系下通过数值实验测定宏观刚度矩阵  $\mathbb{C}^{\text{global}}$  ( $x, y, z$  方向)

对于三维各向异性，广义胡克定律为：

$$\sigma = \mathbb{C}^{\text{global}} : \varepsilon$$

其中  $\mathbb{C}^{\text{global}}$  先假设为完全各向异性，其中有 21 个独立变量。

选取材料域  $\Omega$  中一个代表性单元，对其施加 6 组独立的均匀应变边界条件，并计算对应的平均应力。

前三组为三个方向的单轴拉伸测试。

分别为  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0$ ； $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_0$ ； $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_0$ ，其余项均为 0

进而得到全项平均应力分别为  $\{\sigma\}^{(1)}$ ， $\{\sigma\}^{(2)}$ ， $\{\sigma\}^{(3)}$ 。

则有  $\mathbb{C}^{\text{global}}$  中第一列元素为  $\{\sigma\}^{(1)}/\varepsilon_0$ ，第二列为  $\{\sigma\}^{(2)}/\varepsilon_0$ ，第三列为  $\{\sigma\}^{(3)}/\varepsilon_0$ 。

后三组为三个方向的纯剪切测试。

分别为  $\gamma_{yz} = \gamma_0$ ； $\gamma_{xz} = \gamma_0$ ； $\gamma_{xy} = \gamma_0$ ，其余项均为 0

进而得到全项平均应力分别为  $\{\sigma\}^{(4)}$ ， $\{\sigma\}^{(5)}$ ， $\{\sigma\}^{(6)}$

则有  $\mathbb{C}^{\text{global}}$  中第四列元素为  $\{\sigma\}^{(4)}/\varepsilon_0$ ，第五列为  $\{\sigma\}^{(5)}/\varepsilon_0$ ，第六列为  $\{\sigma\}^{(6)}/\varepsilon_0$ 。

通过六次实验，得到了全局坐标系下的  $6 \times 6$  的完整刚度矩阵  $\mathbb{C}^{\text{global}}$

接下来, 需要确定主轴方向, 即局部坐标系下的刚度矩阵. (1, 2, 3 方向)

由于正交各向异性材料中, 刚度矩阵形式为  $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$

而从全局坐标系到局部坐标系, 需要旋转矩阵  $[R]$  实现.

$$\text{即有 } C_{ijkl}^{\text{local}} = R_{ip} R_{jq} R_{kr} R_{ls} C_{pqrs}^{\text{global}}$$

而关于  $R$  的选取即为使得变换后的矩阵  $C_{ijkl}^{\text{local}}$  中左支为 0 的项平方和最小.

进而得到主轴方向以及对应的材料参数.

而对于得到的局部刚度矩阵  $C_{ijkl}^{\text{local}}$  取逆, 再与正交各向异性的柔度矩阵

对应求解. 这样计算更加简洁, 即为

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & -\frac{1}{E_3} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{\mu_{23}} \\ \frac{1}{\mu_{13}} \\ \frac{1}{\mu_{12}} \end{array} \right] \square$$

## 题 1.2

首先, 对于空间问题, 三维情况下, 总的应变能密度为

$$W = \frac{1}{2} K (\varepsilon_{kk})^2 + G e_{ij} e_{ij}$$

其中  $\varepsilon_{kk}$  为体积应变,  $e_{ij}$  为偏应变.

因此有剪切模量  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$ , 体积模量  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$ , 即  $-1 < \nu < 0.5$

而对于二维情况, 平面应力问题中,  $\sigma_{22} = \sigma_{x2} = \sigma_{y2} = 0$ . 则有

$$[L] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ \nu & 1 & & \\ & & & \\ & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

而该式正定, 则有  $|\nu| < 1$

而这个过程中, 是由于三维空间中,  $\nu = 0.5$  即为体积不可压缩.

而退化到二维平面应力问题, 强制要求  $\sigma_{22} = 0$ , 而  $\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33})$

并不为零, 即  $\nu = 0.5$  时, 当沿平面两方向双轴拉伸时, 在厚度方向仍可变薄.

从而体积不变, 而当  $\nu = 1$  时, 才会产生奇异点.

# 固体本构模型与多尺度方法-HW2

张家瑞, 2401111734

**题 2.1** 利用一款你熟悉的商业/开源有限元求解器, 模拟一个弹塑性梁结构在加载、卸载过程中产生塑性变形的过程。采用实体单元、小变形假设。

如果专业与计算力学相关, 可以进一步研究 4 节点四面体单元、10 节点四面体单元、8 节点六面体完全积分单元、8 节点六面体缩减积分单元 (ABAQUS 中分别是 C3D4、C3D10M、C3D8、C3D8R) 对仿真结果的影响, 并进行简单的讨论。

## 目录

第一部分	模拟设置 .....	2
第二部分	模拟结果 .....	2
(一)	4 节点四面体单元 C3D4 .....	3
(二)	10 节点四面体单元 C3D10M .....	5
(三)	8 节点六面体完全积分单元 C3D8 .....	7
(四)	8 节点六面体缩减积分单元 C3D8R .....	9
第三部分	结果对比与总结 .....	11

## 第一部分 模拟设置

在本文中，我们选取悬臂梁的均布加载问题为例，探究不同单元选取对模拟结果的影响。

悬臂梁几何尺寸选取为 $100 \times 10 \times 10$  mm。材料选取为 304 不锈钢，杨氏模量为 $2 \times 10^5$  MPa，泊松比为0.3，塑性信息设定为(200,2,0)、(246,0.0235)、(294,0.0474)、(374,0.0935)、(437,0.1377)、(480,0.18)。网格划分采用全局间距2 mm撒种子。

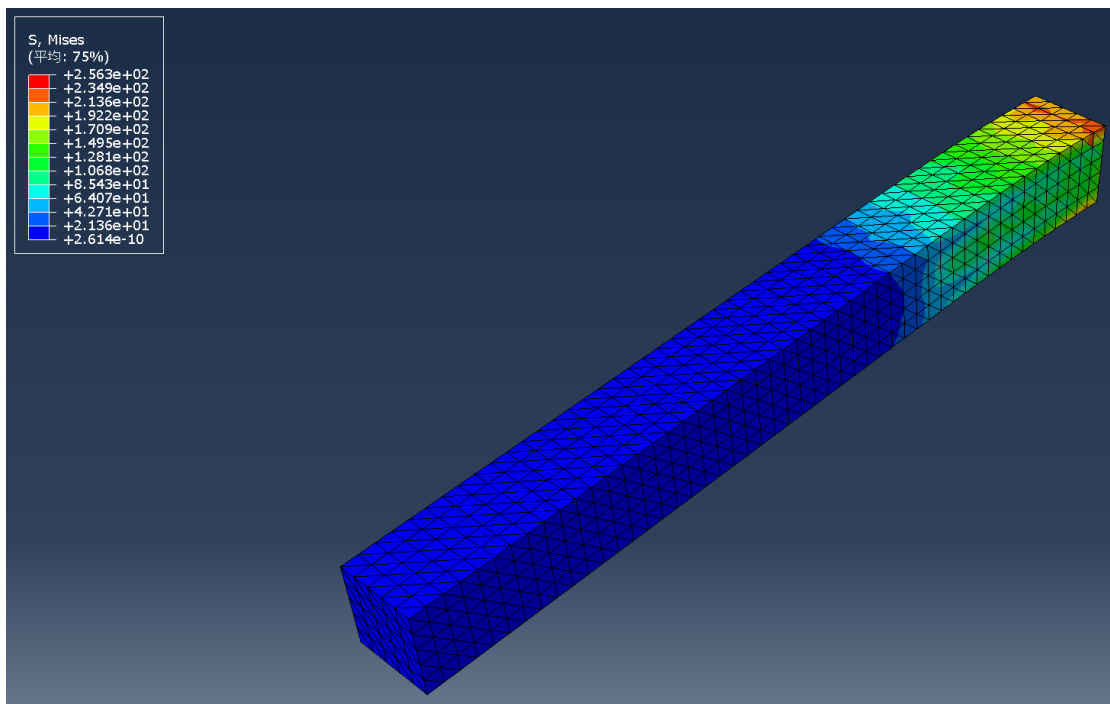
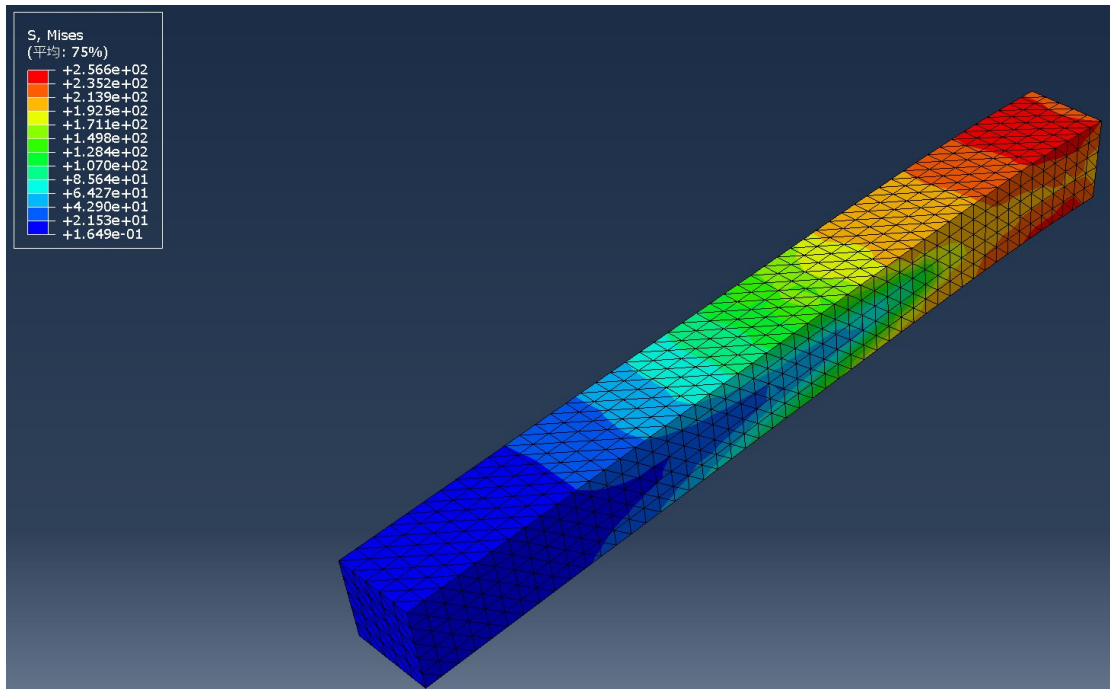
分析步共分为三步，Initial、Loading、Unloading。位移边界条件设置为，约束一端的全部位移。Loading 阶段，在悬臂梁的上表面施加均布载荷，大小为2 MPa。在 Unloading 阶段，设置该载荷停用。

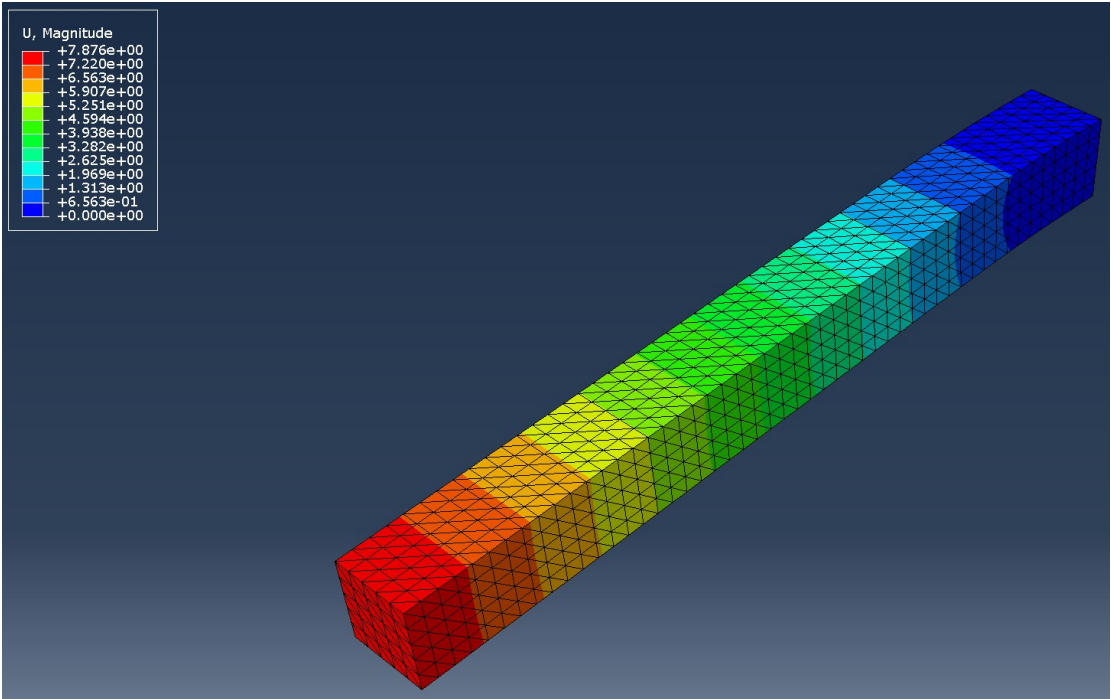
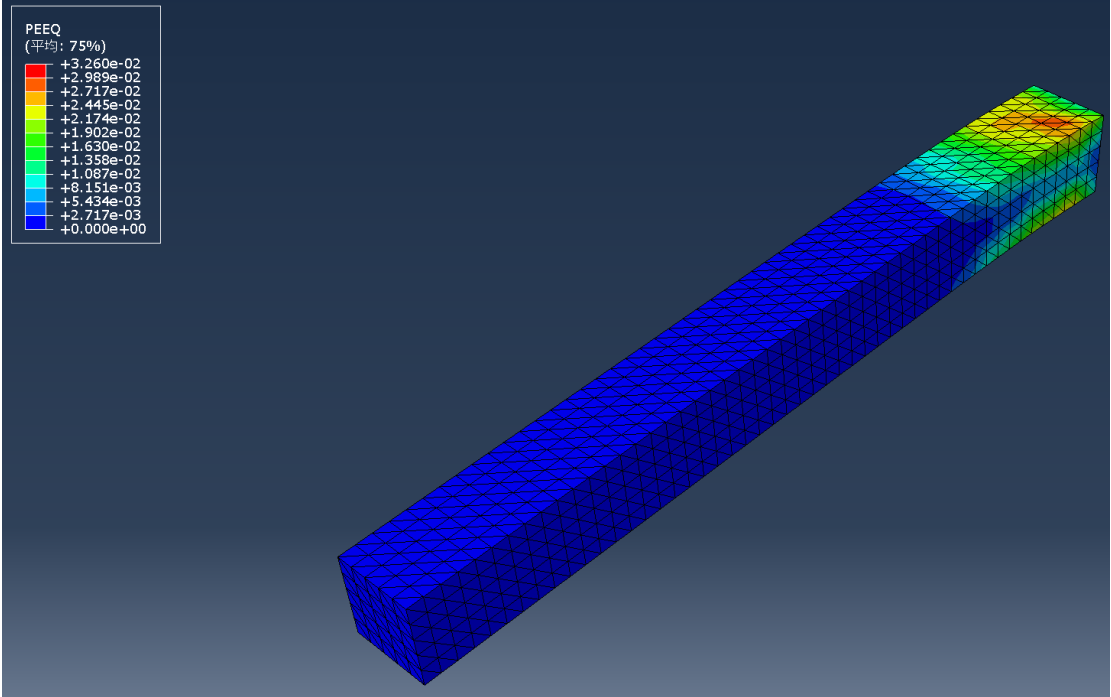
由于本问题中，要求小变形假设，因此所有分析步中几何非线性均关闭。通过调整不同的单元类型观察对变形的影响。

## 第二部分 模拟结果

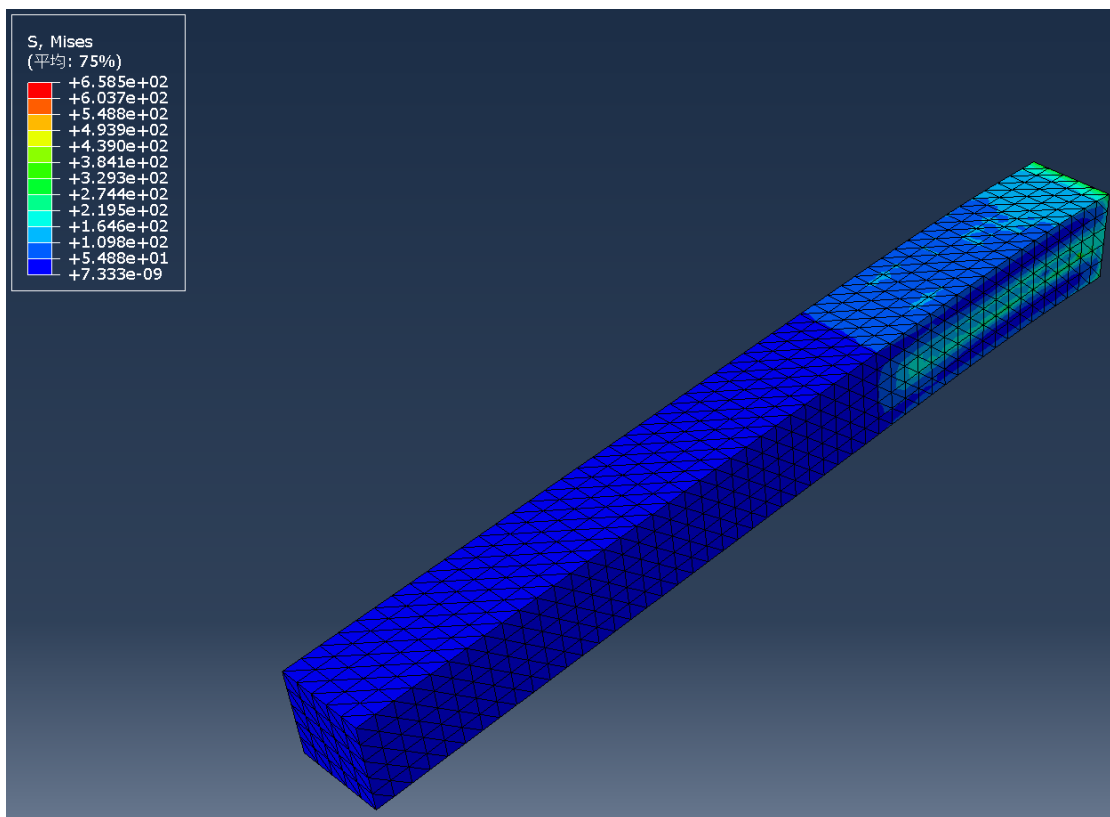
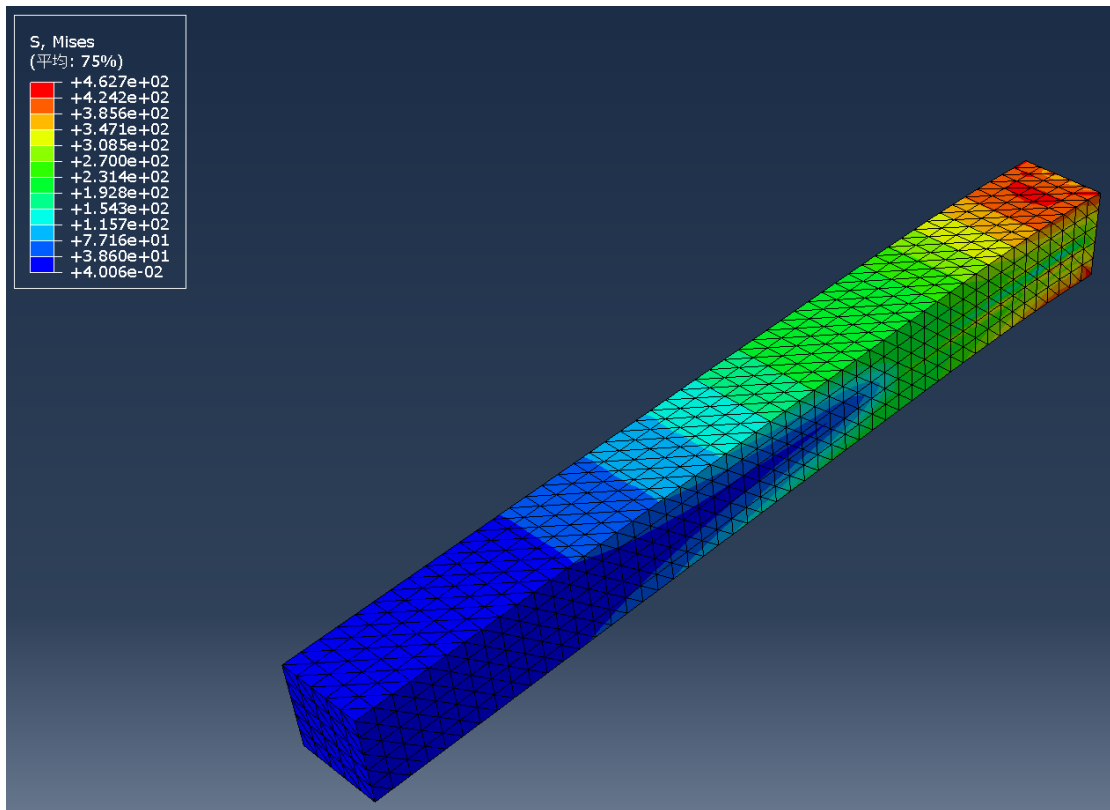
每种网格单元模拟结果下，共有四张图，分别为加载后的 Mises 应力云图、卸载后的 Mises 应力云图、加载后的塑性应变云图、卸载后的位移云图。

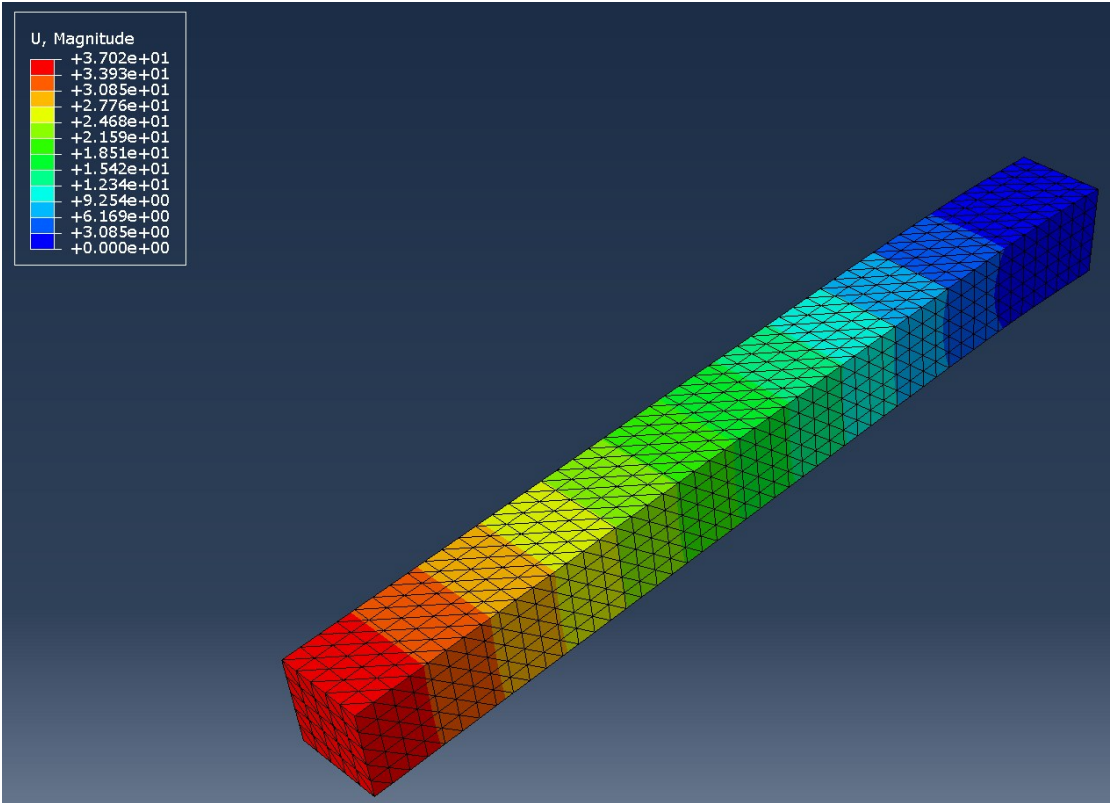
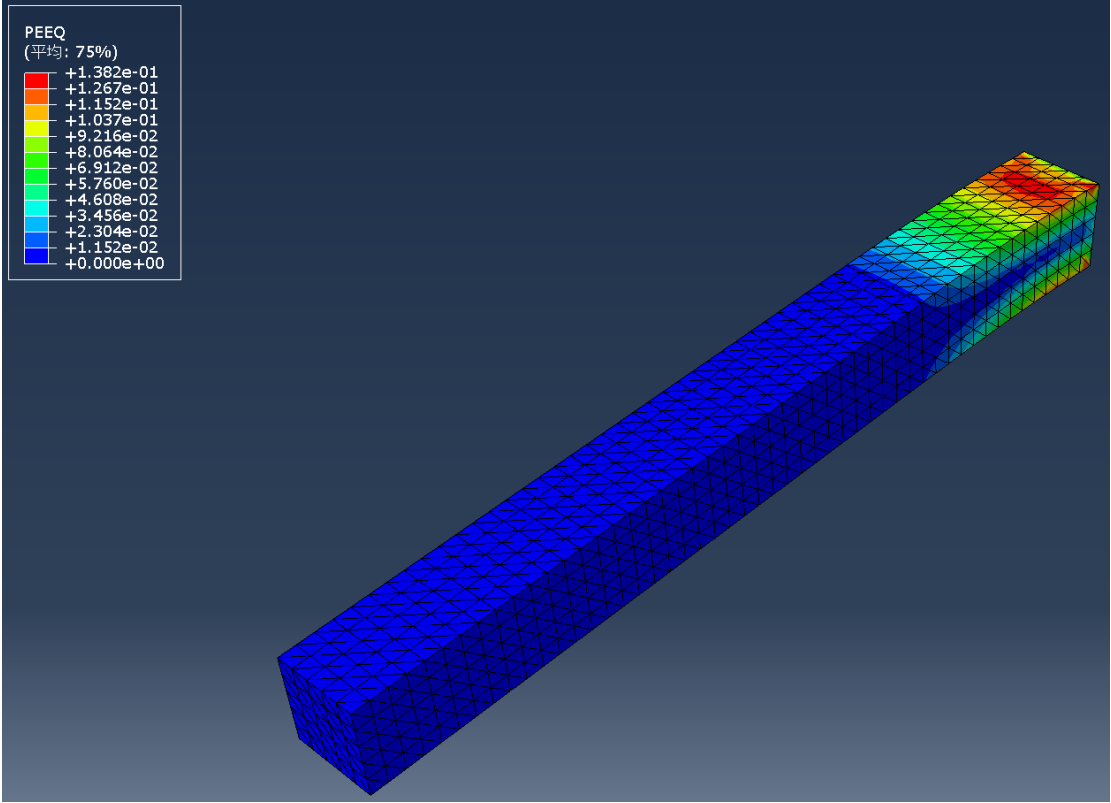
# (一) 4 节点四面体单元 C3D4



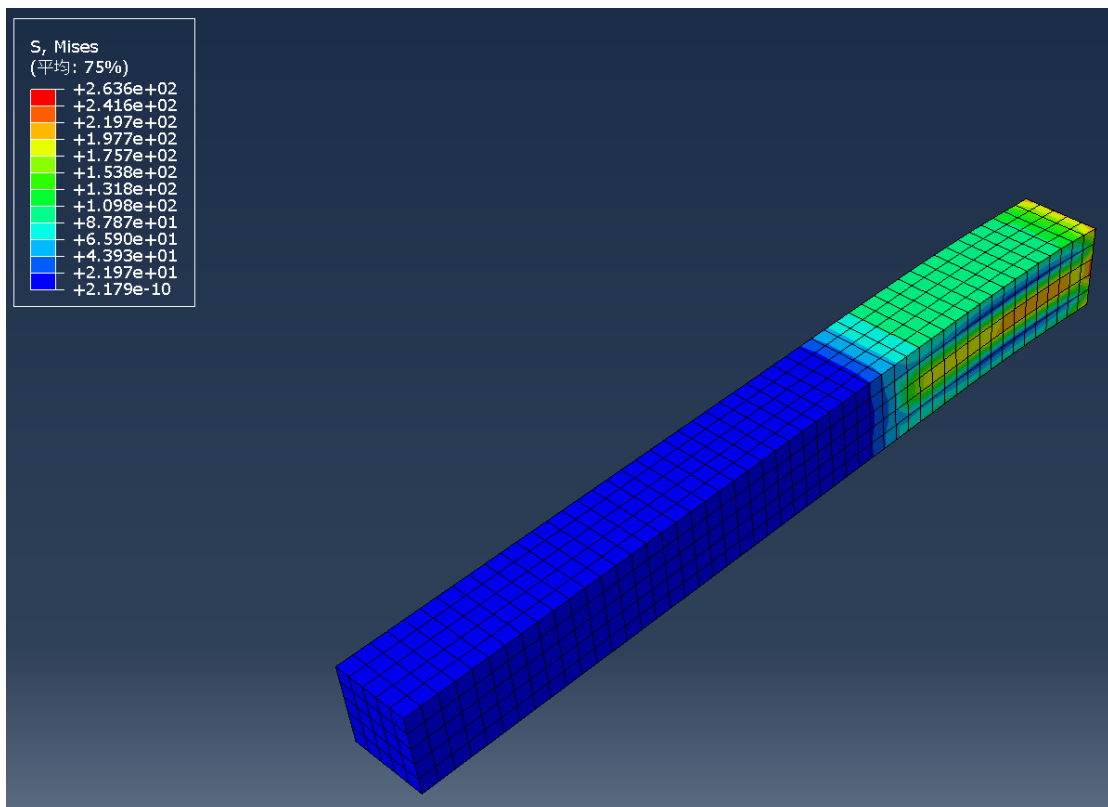
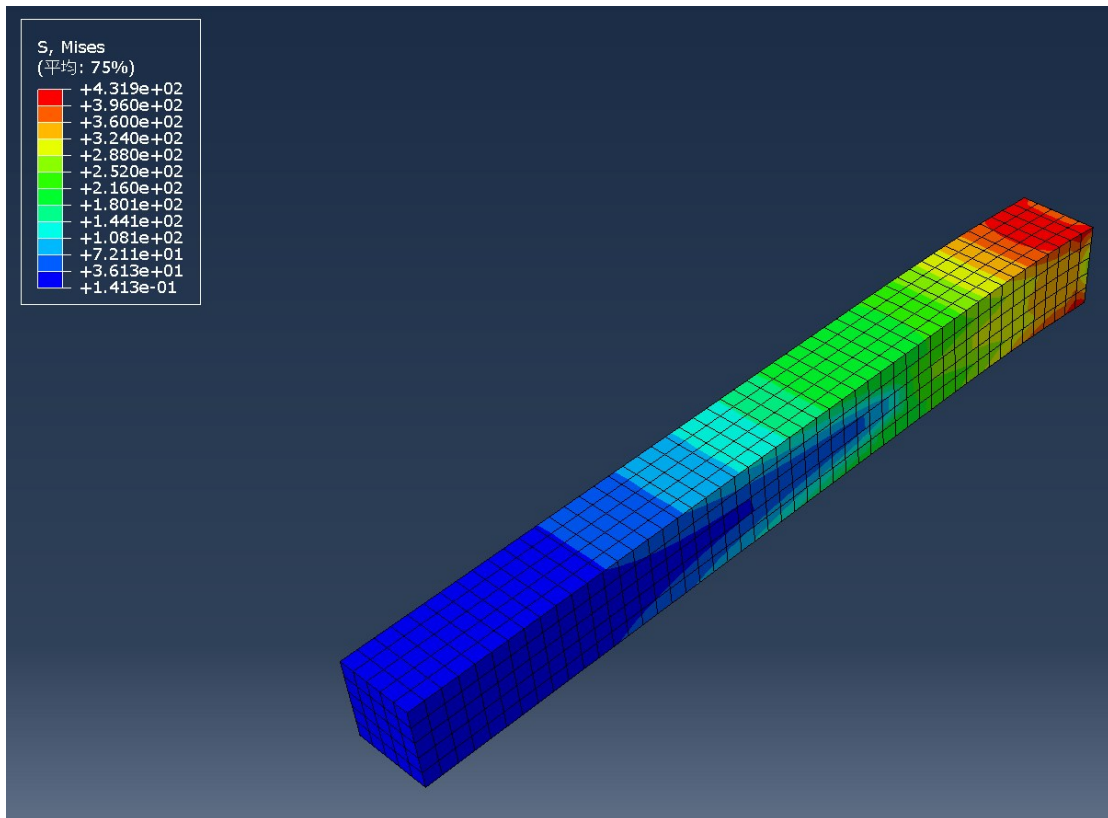


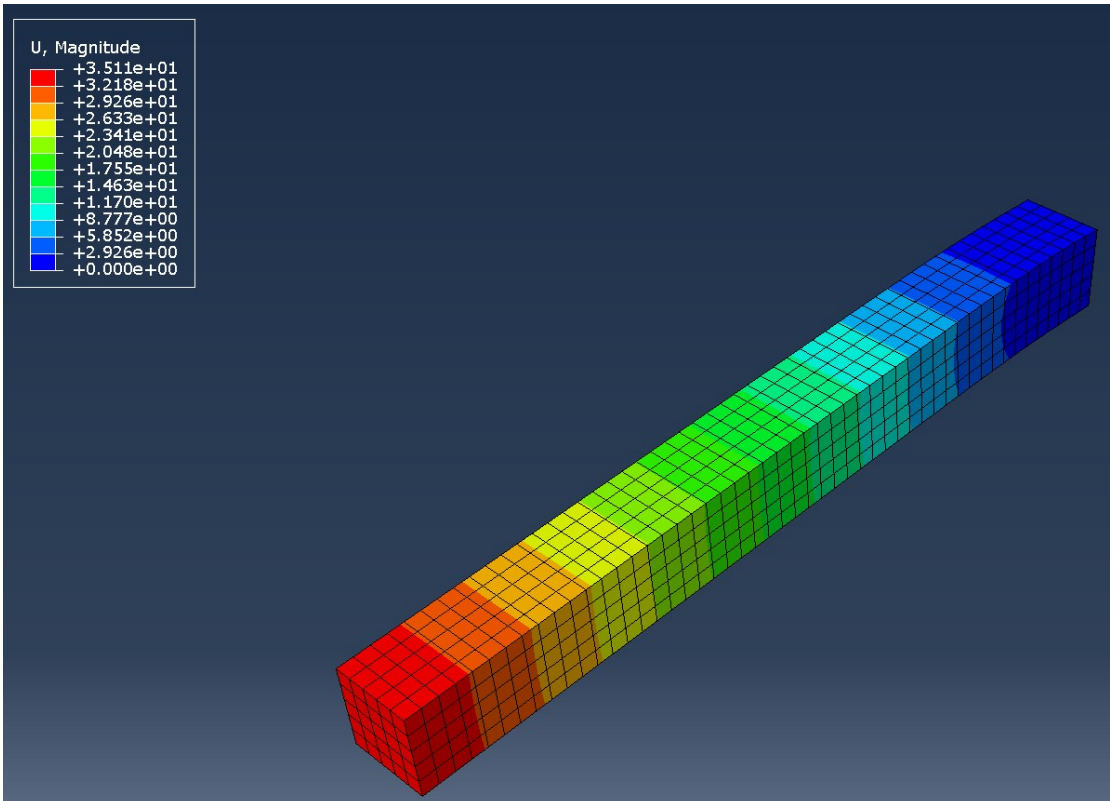
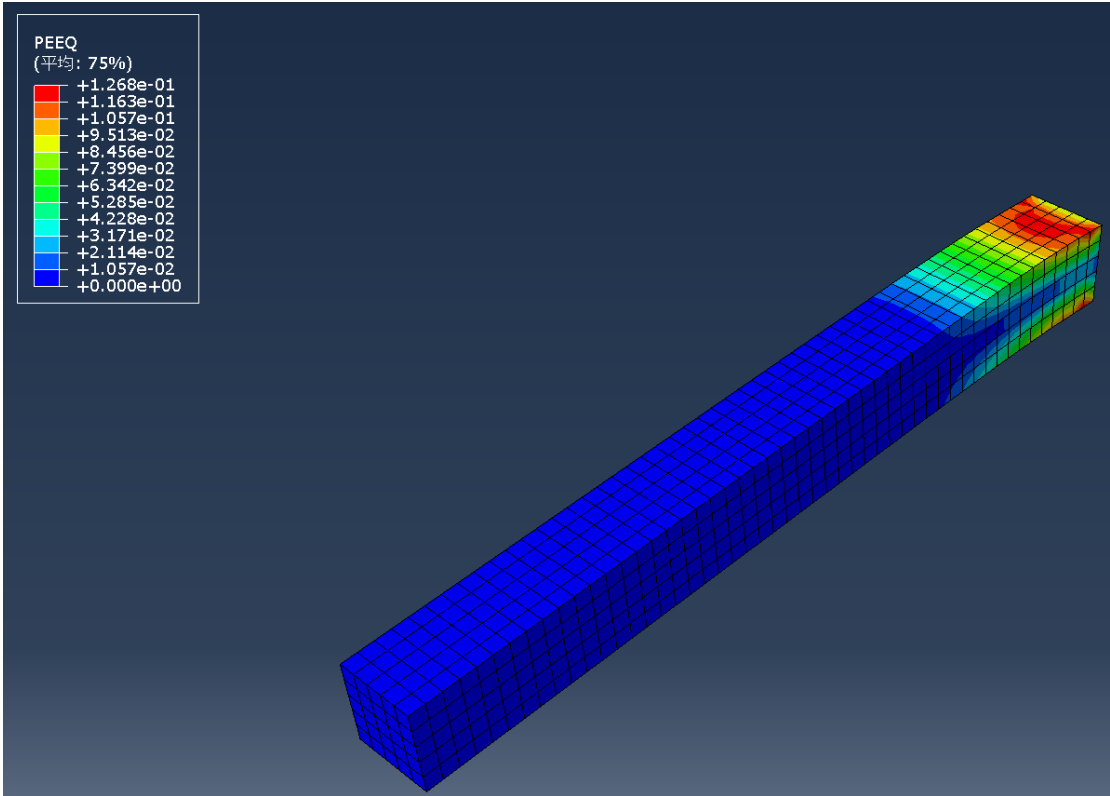
(二) 10 节点四面体单元 C3D10M



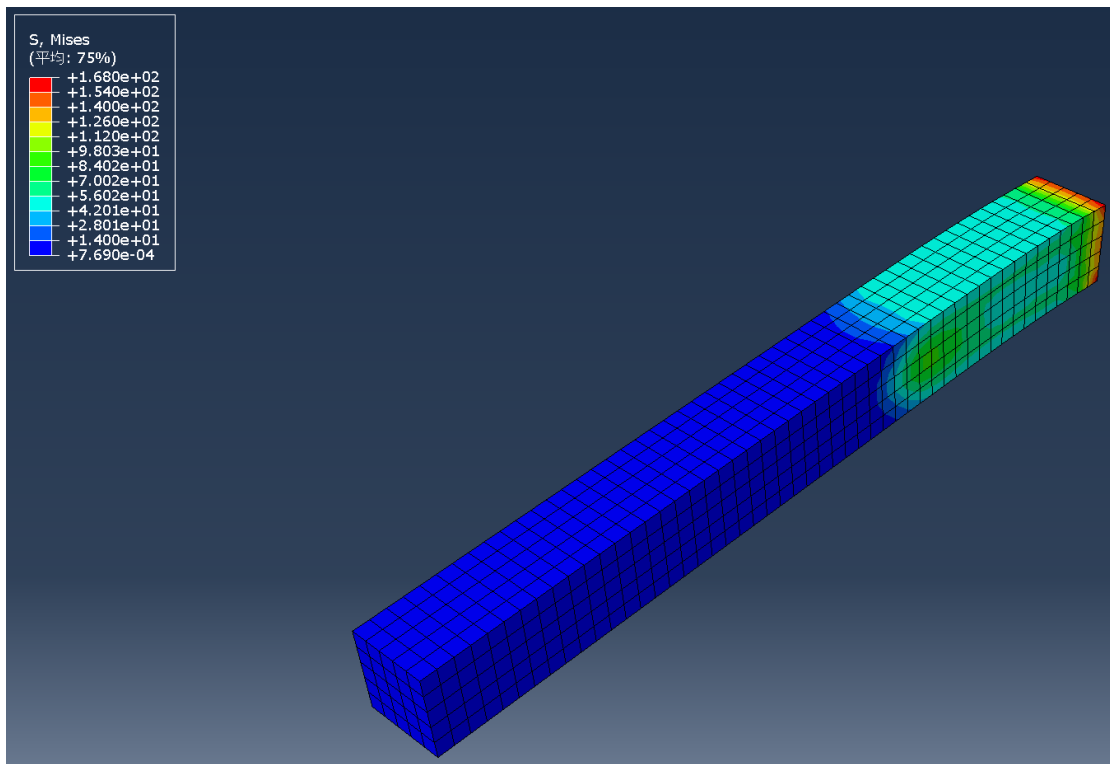
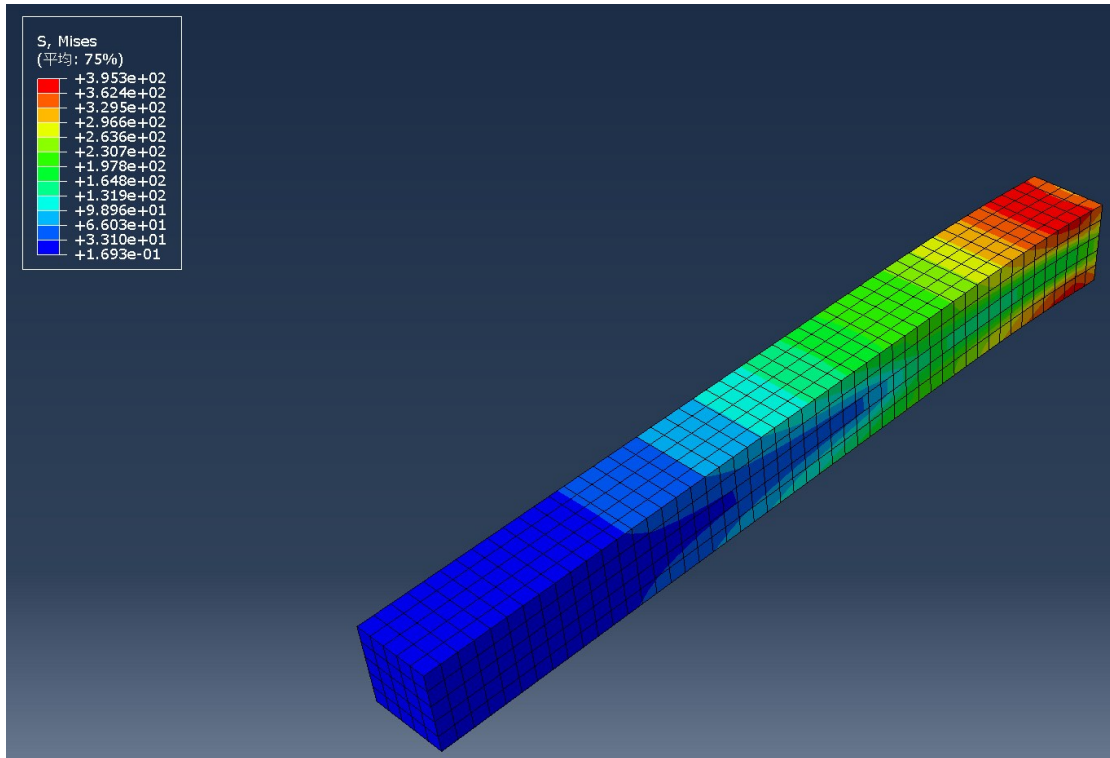


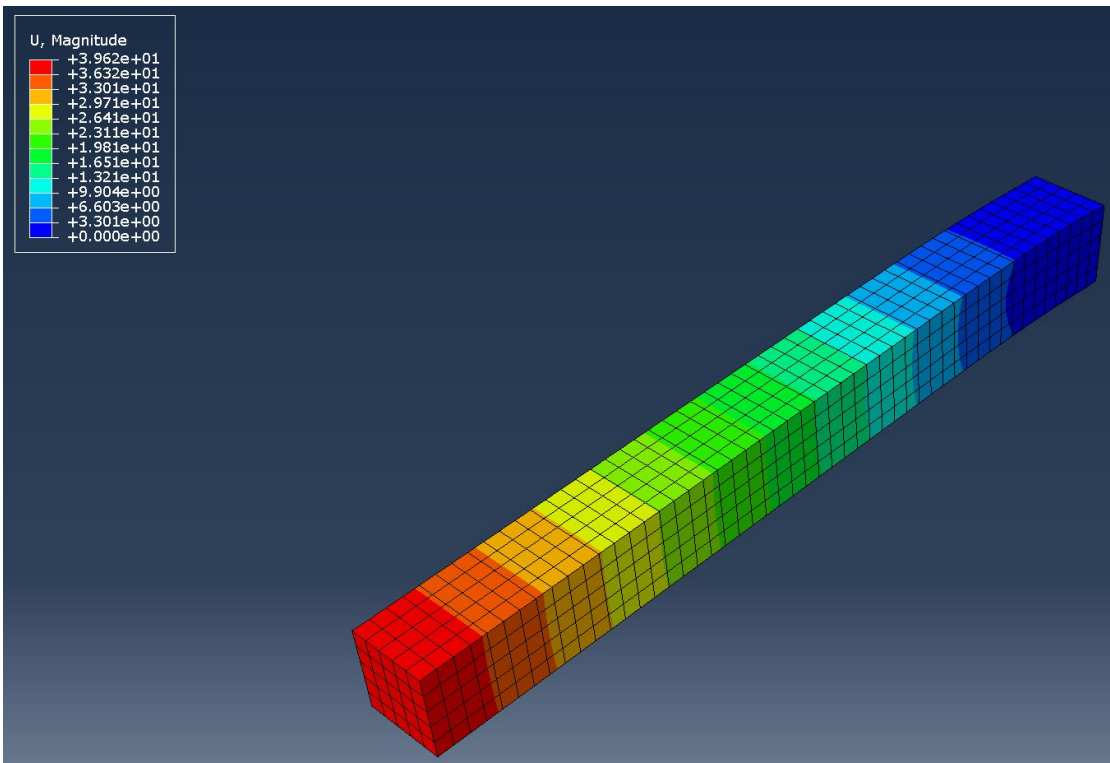
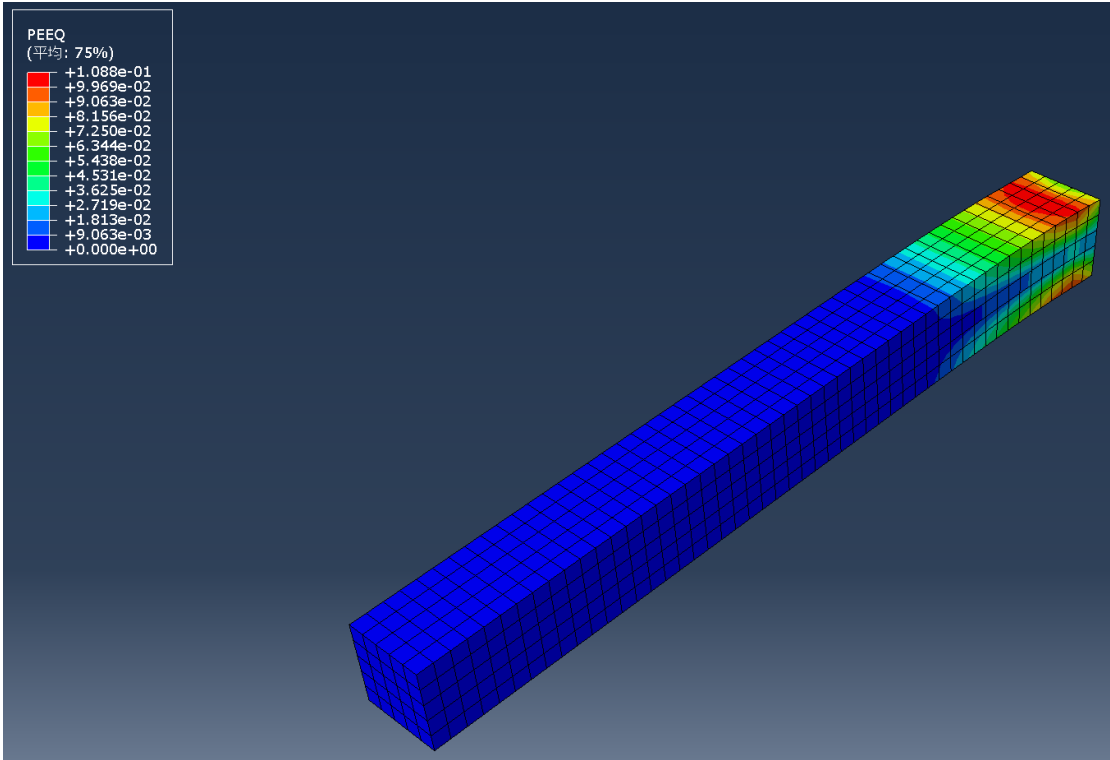
(三) 8 节点六面体完全积分单元 C3D8





(四) 8 节点六面体缩减积分单元 C3D8R





### 第三部分 结果对比与总结

在本模拟中，在 Loading 结束时，根部上下表面的应力均超过200.2 MPa，且出现非零值塑性应变。在 Unloading 结束时，梁内仍会有残余应力，且塑性应变保持不变，梁尖端不会回到初始位置，留有残余变形。

通过对比可以发现，C3D4 预测的位移结果偏小，这是因为 C3D4 是常应变单元，在工程和科研中应尽量避免使用 C3D4 进行弯曲应力分析，除非只看大致趋势或作为填充单元。而对于增加了节点数的 C3D10 单元，其预测的准确性较好。C3D8R 相较于 C3D8 是采用了缩减积分，也就是单个积分点，可以避免剪切自锁的现象，对于 C3D8 的完全积分，会导致刚度偏大，进而位移计算值略偏小。

因此在有限元模拟中，我们需要根据不同的工况，挑选使用正确的网格形式。