

# 断裂力学课程作业（前八次作业）

姓名 张家瑞 学号 2401111734 院系 工学院力学与工程科学系

## 目录

<b>1 第一次作业</b>	<b>3</b>
1.1 对有裂纹的固体材料，其破坏按照断裂力学的观点是如何表述的？	3
1.2 为什么说裂纹顶端应力应变分布的渐近解在断裂力学里起着核心作用？	3
1.3 阅读参考书，并从椭圆孔口问题分析的角度推导出 I 型和 II 型裂纹问题的裂尖渐近解。	3
<b>2 第二次作业</b>	<b>6</b>
2.1 画出角分布函数的函数曲线。	6
2.2 什么是应力叠加原理？	6
2.3 如何从典型的裂纹渐近解获得复合型裂纹的渐近解？	6
2.4 如何理解确定应力强度因子的方法？	6
2.5 请补充裂纹面点载荷应力强度因子确定的完整步逐。	7
2.6 什么是复合型断裂准则？	8
<b>3 第三次作业</b>	<b>8</b>
3.1 试简述固体中总势能的改变与裂纹扩展的关系。	8
3.2 针对典型的 II 型和 III 型裂纹尖端渐近解，试推导能量释放率的表达式。	9
3.3 针对下列裂纹体及载荷情况，试推导耗散能量的表达式。	9
<b>4 第四次作业</b>	<b>10</b>
4.1 在复合型载荷作用下，裂纹可能会发生偏转，试简述裂纹偏转的条件。	10
4.2 如何由能量法确定平面裂纹问题和空间裂纹问题的能量释放率？	10
4.3 三维表面裂纹的能量释放率除了和裂尖奇异场相关之外，还与哪些因素有关？	10
<b>5 第五次作业</b>	<b>10</b>
5.1 导出证明	10
5.2 行列式推导证明	11
5.3 比较紧凑拉伸裂纹、均匀拉伸单边裂纹和三点弯曲裂纹的应力强度因子结果，分析其异同。	11
<b>6 第六次作业</b>	<b>11</b>
6.1 就能量释放率准则而言，在线性弹性情况和弹塑性情况均有效，但对两种情况在能量推导上最大的区别是什么？	11

6.2	J 积分守恒性成立的条件是什么? . . . . .	12
6.3	为什么说弹塑性断裂的能量释放率准则与裂纹尖端张开位移准则是等效的? . . . . .	12
<b>7</b>	<b>第七次作业</b>	<b>12</b>
7.1	简述推导裂纹尖端弹塑性应力应变渐近场的步骤。 . . . .	12
7.2	裂纹尖端弹塑性渐近解的重要意义是什么? . . . . .	12
7.3	试回答由下列叠加法确定裂尖弹塑性尖端场系数 (J-积分) 的方法是否正确, 为什么? . . . . .	12
<b>8</b>	<b>第八次作业</b>	<b>12</b>
8.1	试证明坐标原点改变后, 该渐近解也适用于弹塑性材料的裂尖弹性区 . . . . .	12
8.2	什么是特征线? 特征线的物理意义是什么? . . . . .	12
8.3	在硬化材料的裂尖场中, 无明显的特征线, 而在弱硬化材料特别是理想塑性材料的裂尖场中, 存在明显的特征线及特征区, 试分析可能的原因。 . . . .	13
8.4	试从下列理想刚塑性材料的速率应力协调关系 . . . . .	13

# 1 第一次作业

## 1.1 对有裂纹的固体材料，其破坏按照断裂力学的观点是如何表述的？

在材料中存在裂纹时，裂纹尖端会产生应力集中现象，使得裂纹尖端的局部应力远高于材料整体的应力水平。因此，即使整体应力较低，裂纹尖端的局部应力可能足以引起材料的破坏。最初，人们对于固体材料的破坏认为是强度准则，但人们发现对于一些特殊的情况，强度准则并不适用，比如有棱角的结构应该出现应力集中但没有发生破坏，因此人们引入了能量准则并成功进行了解释。断裂力学的核心概念之一是应力强度因子，它描述了裂纹尖端附近的应力场。当应力强度因子达到材料的临界值时，即当  $K = K_c$  时，材料发生断裂。这一临界值被称为材料的断裂韧性，它反映了材料抵抗裂纹扩展的能力。而根据能量观点，当裂纹扩展时，系统的总能量（弹性能和表面能）必须减少。材料会在裂纹扩展所需的能量释放速率等于或超过材料的断裂能时发生断裂。

## 1.2 为什么说裂纹顶端应力应变分布的渐近解在断裂力学里起着核心作用？

裂纹尖端是应力集中的关键区域，局部应力场的行为决定了材料是否会发生断裂。由于随着半径  $r$  的增加，应力应变解中的其它项都趋近于零。渐近解能够准确描述裂纹尖端附近的应力和应变分布，尤其是在裂纹尖端极小范围内的高应力区域。因此，它为理解和预测裂纹在应力集中条件下的扩展提供了精确的数学模型。并且，材料是否发生裂纹扩展，通常取决于裂纹尖端的应力强度因子是否达到材料的临界应力强度因子  $K_c$ 。渐近解直接关系到应力强度因子的  $K_c$  计算，渐近解表明，裂纹尖端的应力随着距离裂纹尖端的距离  $r$  近似为  $1/\sqrt{r}$  的形式发散。应力强度因子控制了这种发散的幅度，从而成为表征裂纹尖端应力场的核心参数。通过渐近解，可以精确计算应力强度因子，并与材料的断裂韧性进行比较，从而判断材料是否会断裂或裂纹是否会扩展。并且渐近解适用于三种类型的裂纹构型，通过引入不同的应力强度因子统一描述三种裂纹扩展模式。无论裂纹受拉伸、剪切或撕裂作用，渐近解都能为这些不同的裂纹扩展模式提供统一的数学框架。此外，它也可以用于各种材料（如金属、陶瓷和聚合物）以及各种裂纹形状和加载条件下的分析。

## 1.3 阅读参考书，并从椭圆孔口问题分析的角度推导出 I 型和 II 型裂纹问题的裂尖渐近解。

对于椭圆孔口问题。如图 1 所示，假设一薄板中存在有距离边界较远的椭圆形孔口，其长轴与短轴长度分别为  $2a$  与  $2b$ ，在与  $x$  轴成  $\alpha$  角的方向受有均匀拉应力  $q$ 。

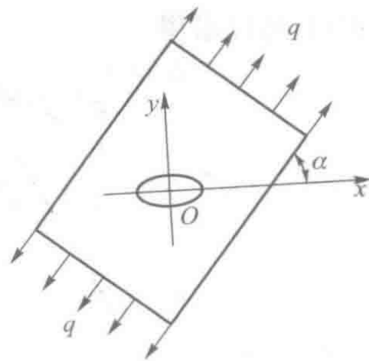


图 1: 椭圆孔口问题

此时有应力函数解答

$$\varphi(\zeta) = \frac{qR}{4} \left[ \frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha-m}) \zeta \right], \quad (1.3.1a)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{qR}{2} \left[ \frac{1}{\zeta} e^{2i\alpha} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}}{m\zeta^2 - 1} \right], \quad (1.3.1b)$$

其中  $R = (a+b)/2$ ,  $m = (a-b)/(a+b)$ ,  $\zeta$  为保角变换后的区域, 且变换关系式为  $z = x + iy = \omega(\zeta) = R(1/\zeta + m\zeta)$ 。

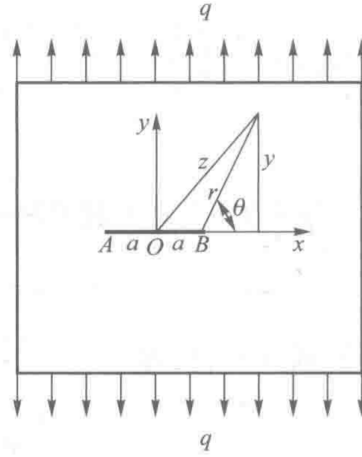


图 2: I 型裂纹问题

对于上述解答退化为 I 型裂缝问题, 即当  $b = 0$  时, 有  $R = a/2$ ,  $m = 1$ ,  $z = (1/\zeta + \zeta)a/2$ 。且考虑拉力垂直于裂纹, 即  $\alpha = \pi/2$ , 式 1.3.1 简化为

$$\varphi(\zeta) = \frac{qa}{8} \left( \frac{1}{\zeta} - 3\zeta \right), \quad (1.3.2a)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{qR}{4} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3 + 3\zeta}{1 - \zeta^2} \right), \quad (1.3.2b)$$

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}, \quad (1.3.2c)$$

再根据应力和位移的复变函数表示

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\text{Re}[\varphi'(z)], \quad (1.3.3a)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (1.3.3b)$$

可以得到

$$\sigma_y + \sigma_x = q \left[ 2\text{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right], \quad (1.3.4a)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q \left[ \frac{2ia^2y}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + 1 \right]. \quad (1.3.4b)$$

如图 2 所示, 考虑裂纹尖端为原点的极坐标系, 有几何关系

$$z = a + r \cos \theta + ir \sin \theta, \quad (1.3.5a)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (1.3.5b)$$

将式 1.3.5 代入式 1.3.4, 只保留其中随着  $r$  的减小而增大的主项, 略去其中的次要项, 可以得到

$$\sigma_y + \sigma_x = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (1.3.6a)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( \sin \frac{3\theta}{2} + i \cos \frac{3\theta}{2} \right). \quad (1.3.6b)$$

进而解得

$$\sigma_x = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (1.3.7a)$$

$$\sigma_y = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (1.3.7b)$$

$$\tau_{xy} = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \quad (1.3.7c)$$

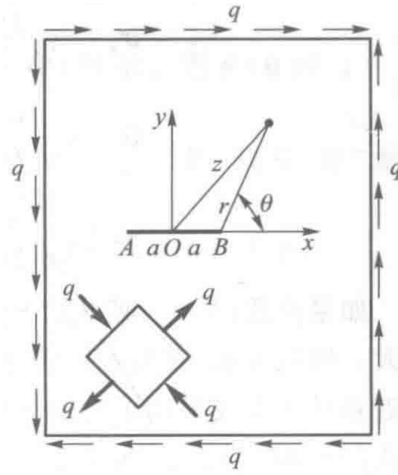


图 3: II 型裂纹问题

对于上述解答退化为 II 型裂缝问题, 即当  $b = 0$  时, 有  $R = a/2$ ,  $m = 1$ ,  $z = (1/\zeta + \zeta)a/2$ 。且考虑  $\alpha = \pi/4$  的方向受均布拉力  $q$ ,  $\alpha = -\pi/4$  的方向受均布压力  $q$ , 式 1.3.1 简化为

$$\varphi(\zeta) = \frac{iqua}{2} \zeta, \quad (1.3.8a)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{iqua}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3 + \zeta}{1 - \zeta^2} \right), \quad (1.3.8b)$$

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}, \quad (1.3.8c)$$

再根据式 1.3.3, 可得

$$\sigma_y + \sigma_x = -2q \operatorname{Re} \frac{iz}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (1.3.9a)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q \frac{ia^2 \bar{z} + iz(2z^2 - 3a^2)}{(z^2 - a^2)^{3/2}}. \quad (1.3.9b)$$

如图 3 所示, 考虑裂纹尖端为原点的极坐标系, 有几何关系

$$z = a + r \cos \theta + ir \sin \theta, \quad (1.3.10a)$$

$$\bar{z} = a + r \cos \theta - ir \sin \theta, \quad (1.3.10b)$$

将式 1.3.10 代入式 1.3.9，只保留其中随着  $r$  的减小而增大的主项，略去其中的次要项，可以得到

$$\sigma_y + \sigma_x = -q\sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.3.11a)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + i \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]. \quad (1.3.11b)$$

进而解得

$$\sigma_x = -q\sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (1.3.12a)$$

$$\sigma_y = q\sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad (1.3.12b)$$

$$\tau_{xy} = q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \quad (1.3.12c)$$

## 2 第二次作业

### 2.1 画出角分布函数的函数曲线。

如图 4 所示。

### 2.2 什么是应力叠加原理？

应力叠加原理表述为在连续体中，若某一点的应力是由多个外力或载荷作用引起的，则该点的总应力可以看作是由各个载荷所产生的应力的代数和。这一原理基于线性弹性材料的性质。

### 2.3 如何从典型的裂纹渐近解获得复合型裂纹的渐近解？

首先判断复合型裂纹的问题类型，例如平面问题、空间剪切问题、空间拉-剪耦合问题，分析其由哪些典型裂纹组合而成。之后利用应力叠加原理，将各个裂纹的应力场叠加，进而从典型裂纹的渐近解推导出复合型裂纹的渐近解。

### 2.4 如何理解确定应力强度因子的方法？

在确定应力强度因子时，我们不能将渐近解带入表达式，因为本身应力强度因子的推导是借助了渐近解。具体可以通过实验方法测量、有限元法、边界元法、差分法、能量法、力学理论解等解析数值或实验方法测得应力的大小，进而确定应力强度因子。

确定应力强度因子的公式为

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta)|_{\theta=0}, \quad (2.4.1a)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta)|_{\theta=0}, \quad (2.4.1b)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, \theta)|_{\theta=0}. \quad (2.4.1c)$$

其中的应力  $\sigma$  均为裂纹前方实际应力状态。

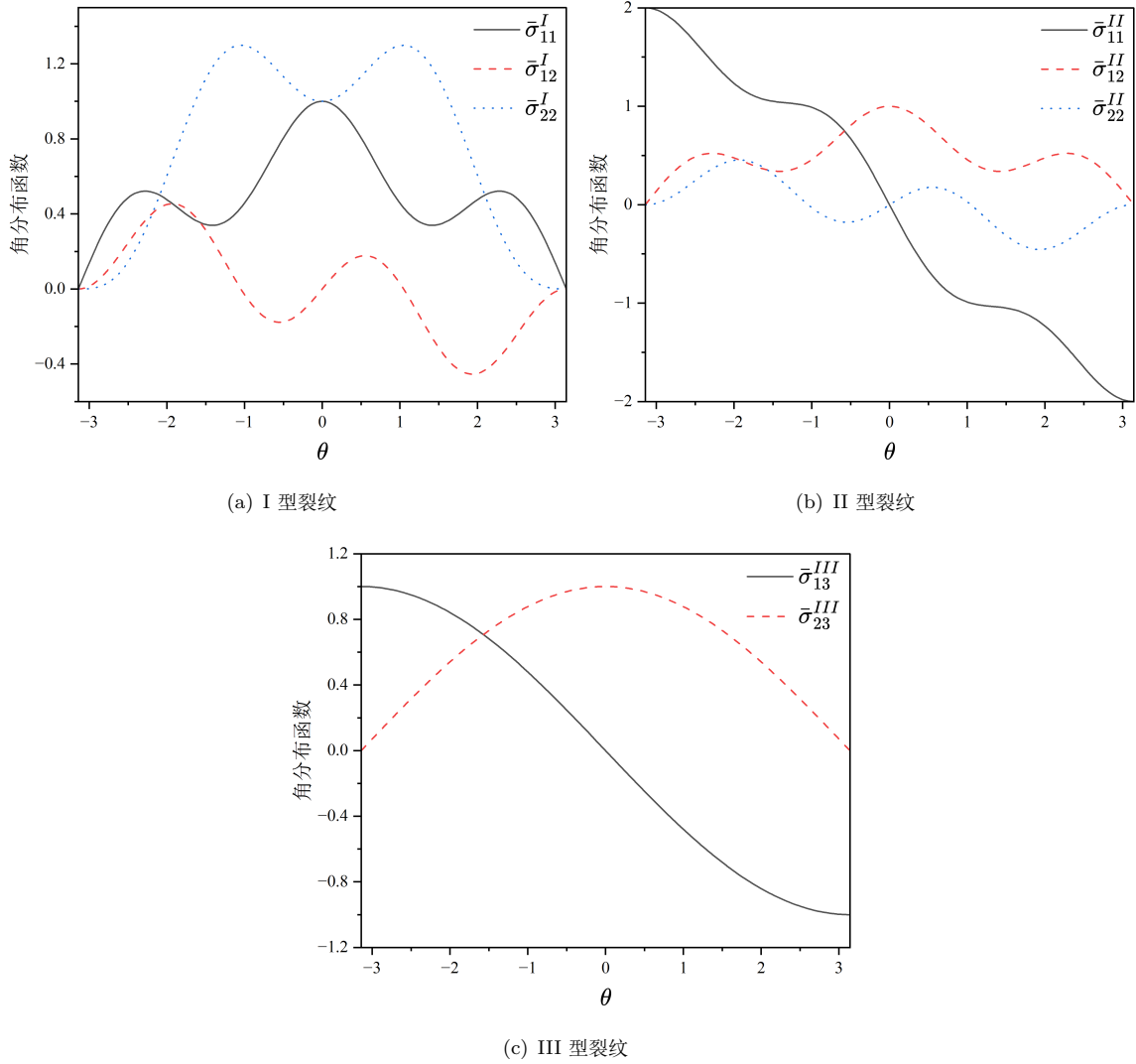


图 4: 三种裂纹角分布函数图

### 2.5 请补充裂纹面点载荷应力强度因子确定的完整步逐。

对于裂纹问题的点载荷，实际上为张开型与平面剪切两部分的叠加，根据已有的两种情况的渐进解，此时有裂纹问题的点载荷的基本解

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.5.1)$$

又因为  $z - z_0 = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$  与  $K = K_I - iK_{II}$ ，式 2.5.1 通过变换有

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{\pi(z - z_0)}} \right]. \quad (2.5.2)$$

弹性力学中的通解

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\text{Re} [\phi'(z)], \quad (2.5.3)$$

所以有

$$K = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z - z_0} \phi'(z). \quad (2.5.4)$$

在弹性力学多连体问题中，解析函数  $\phi_1(z)$  与  $\psi_1(z)$  可能表现为多值的。因此需要合适的复变函数选择来保证其单值性质。通过考察应力单值条件与位移单值条件，对于具有  $m$  个内边界和一个外边界的一般多连体，则有一般表达式

$$\phi_1(z) = -\frac{1+\mu}{8\pi} \sum_{k=1}^m (\bar{F}_{xk} + i\bar{F}_{yk}) \ln(z - z_k) + \phi_{1*}(z), \quad (2.5.5a)$$

$$\psi_1(z) = \frac{3-\mu}{8\pi} \sum_{k=1}^m (\bar{F}_{xk} - i\bar{F}_{yk}) \ln(z - z_k) + \psi_{1*}(z). \quad (2.5.5b)$$

设定其外边界趋于无限远，则该情况变为无限大的多连体，再将函数在无限远处的性质考虑进来，则有

$$\phi_1(z) = -\frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \ln z + Bz + \phi_1^0(z), \quad (2.5.6a)$$

$$\psi_1(z) = \frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \ln z + (B' + iC')z + \psi_1^0(z), \quad (2.5.6b)$$

其中  $\phi_1^0(z) = a_1/z + a_2/z^2 + \dots$ ,  $\psi_1^0(z) = b_1/z + b_2/z^2 + \dots$ 。

通过保角变换

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots \right), \quad (2.5.7)$$

有

$$\phi_1(\zeta) = \frac{1+\mu}{8\pi} (\bar{F}_x + i\bar{F}_y) \ln \zeta + B\zeta + \phi_1^0(\zeta), \quad (2.5.8a)$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{3-\mu}{8\pi} (\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \ln \zeta + (B' + iC')\zeta + \psi_1^0(\zeta), \quad (2.5.8b)$$

其中  $\phi_1^0(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$ ,  $\psi_1^0(\zeta) = b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots$ 。

又因为  $\phi'(z) = \phi'(\eta)/\omega'(\eta)$ ,  $z = \omega(\eta) = a(\eta + 1/\eta)/2$ , 再联系式 2.5.4, 可得

$$K_I = \frac{P}{2\sqrt{\pi a}} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^{1/2} + \frac{Q}{2\sqrt{\pi a}} \left( \frac{k-1}{k+1} \right), \quad (2.5.9a)$$

$$K_{II} = -\frac{P}{2\sqrt{\pi a}} \left( \frac{k-1}{k+1} \right) + \frac{Q}{2\sqrt{\pi a}} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^{1/2}. \quad (2.5.9b)$$

其中平面应力问题中  $k = (3-\mu)/(1+\mu)$ , 平面应变问题中  $k = 3-4\mu$ 。

## 2.6 什么是复合型断裂准则?

通常裂纹体所受载荷并不一定是单一类型的，而是多种的组合。我们得到符合型裂纹的渐近解，在构造应力强度因子时候，根据不同因素的重要程度，选取合适的系数将不同类型的典型裂纹解进行线性叠加，进而得到复合型断裂准则。

平面问题  $K = \sqrt{K_I^2 + \alpha K_{II}^2} \leq K_{IC}$ 。

空间剪切问题  $K = \sqrt{K_{II}^2 + K_{III}^2}$  (or  $K_{IIIC}$ )。

空间拉-剪耦合问题  $K = \sqrt{K_I^2 + \alpha(K_{II}^2 + K_{III}^2)} \leq K_{IC}$ 。

## 3 第三次作业

### 3.1 试简述固体中总势能的改变与裂纹扩展的关系。

裂纹扩展对应总势能减小。在线弹性情况中，总势能的改变是通过能量释放率与裂纹扩展联系起来，对于裂纹扩展的耗散能量减去表面能对裂纹面积的偏导数，当其大于零时，裂纹呈现出扩

展状态，等于零时为临界状态，小于零时候为裂纹不扩展。

### 3.2 针对典型的 II 型和 III 型裂纹尖端渐近解，试推导能量释放率的表达式。

对于 II 型，要用到的相关的应力和位移表达式：

$$\sigma_{21}(r, 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (3.2.1a)$$

$$u_1(r, \pm\pi) = \pm \frac{K_{II}(k+1)}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (3.2.1b)$$

与

$$\sigma_{yx}(x, 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (3.2.2a)$$

$$u_1(\Delta a - x, \pm\pi) = \pm \frac{K_{II}(1+\mu)(k+1)}{2G} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}}. \quad (3.2.2b)$$

通过积分计算得到能量释放率

$$G = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial l} = \frac{(1+\mu)(k+1)K_{II}^2}{2\pi E} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{x}} dx = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (3.2.3)$$

其中对于平面应力问题  $E' = E$ ；对于平面应变问题中  $E' = E/(1 - \mu^2)$ 。

对于 III 型，要用到的相关的应力和位移表达式：

$$\sigma_{23}(r, 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (3.2.4a)$$

$$u_3(r, \pm\pi) = \pm \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (3.2.4b)$$

与

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (3.2.5a)$$

$$u_1(\Delta a - x, \pm\pi) = \pm \frac{2K_{III}(1+\mu)}{G} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}}. \quad (3.2.5b)$$

通过积分计算得到能量释放率

$$G = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial l} = \frac{(1+\mu)K_{III}^2}{2\pi E} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{x}} dx = \frac{(1+\mu)K_{III}^2}{E}. \quad (3.2.6)$$

### 3.3 针对下列裂纹体及载荷情况，试推导耗散能量的表达式。

如图 5 所示。

对于第一种情况，有  $K_I = 1.122\sigma^\infty\sqrt{\pi a}$ ，可得

$$|\Delta \Pi| = \int_0^a B \frac{K_I^2}{E'} da = \frac{0.629\pi B a^2 \sigma^\infty}{E'}. \quad (3.3.1)$$

对于第二种情况，有  $K_{III} = \tau^\infty\sqrt{\pi a}$ ，可得

$$|\Delta \Pi| = \int_0^a B \frac{(1+\mu)K_{III}^2}{E} da = \frac{(1+\mu)\pi B a^2 \tau^\infty}{2E}. \quad (3.3.2)$$

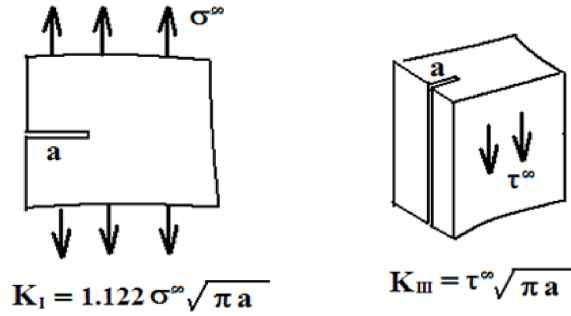


图 5: 两种裂纹情况

## 4 第四次作业

### 4.1 在复合型载荷作用下，裂纹可能会发生偏转，试简述裂纹偏转的条件。

裂纹尖端聚集的能量达到偏转的临界数值。也就是确定裂纹尖端应力场后，确定  $G_\theta = (1 - \mu^2)(\bar{K}_{I\theta}^2 + \bar{K}_{II\theta}^2)/E$ ，根据其二阶导确定临界偏转条件。

### 4.2 如何由能量法确定平面裂纹问题和空间裂纹问题的能量释放率？

对于平面问题首先假设裂纹面张开呈现椭圆形，然后根据裂纹尖端渐进位移解，求出变形能，进而得到能量释放率；对于空间问题，假设为三维椭圆片状裂纹，进而得到  $y$  方向裂纹张开的位移，再根据裂纹面微弧长的变化求得裂纹面积改变得到能量的变化，最后得到能量释放率。但是对于空间问题，理解为平面应变的情况，且对于不同类型的裂纹，需要加上不同的修正系数。

### 4.3 三维表面裂纹的能量释放率除了和裂尖奇异场相关之外，还与哪些因素有关？

还与裂纹的深度与快读、前后自由表面、裂纹于到达背面的距离、试件厚度相关。

## 5 第五次作业

### 5.1 导出证明

已知  $\nabla^2 \nabla^2 U(x, y) = 0$ ，通过坐标转换，设  $z = x + iy$ ， $\bar{z} = x - iy$ ，则有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (5.1.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (5.1.1b)$$

进而可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad (5.1.2a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (5.1.2b)$$

则由上式可得

$$\nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad (5.1.3)$$

因此得证

$$\nabla^4 U = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}}. \quad (5.1.4)$$

所以

$$U = \frac{1}{2} [\bar{z}\phi(z) + z\bar{\phi}(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(z)] = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)]. \quad (5.1.5)$$

## 5.2 行列式推导证明

对于行列式

$$\begin{vmatrix} c_+ & c_- & s_+ & s_- \\ c_+ & c_- & -s_+ & -s_- \\ -s_+^\lambda & -s_-^\lambda & c_+^\lambda & c_-^\lambda \\ s_+^\lambda & s_-^\lambda & c_+^\lambda & c_-^\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.1)$$

通过行变换，可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & s_+ & s_- \\ 0 & 0 & c_+^\lambda & c_-^\lambda \\ c_+ & c_- & 0 & 0 \\ s_+^\lambda & s_-^\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.2)$$

因此有  $s_+ c_-^\lambda = s_- c_+^\lambda$ ,  $c_+ s_-^\lambda = c_- s_+^\lambda$ , 即

$$(\lambda_n - 1) \sin(\lambda_n + 1)\pi \cos(\lambda_n - 1)\pi = (\lambda_n + 1) \sin(\lambda_n - 1)\pi \cos(\lambda_n + 1)\pi, \quad (5.2.3a)$$

$$(\lambda_n - 1) \cos(\lambda_n + 1)\pi \sin(\lambda_n - 1)\pi = (\lambda_n + 1) \cos(\lambda_n - 1)\pi \sin(\lambda_n + 1)\pi. \quad (5.2.3b)$$

可得

$$\tanh(\lambda_n - 1)\pi = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} \tanh(\lambda_n + 1)\pi, \quad (5.2.4a)$$

$$\tanh(\lambda_n + 1)\pi = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} \tanh(\lambda_n - 1)\pi. \quad (5.2.4b)$$

## 5.3 比较紧凑拉伸裂纹、均匀拉伸单边裂纹和三点弯曲裂纹的应力强度因子结果，分析其异同。

三种的形式是基本相同的，但是不同点是分别除以最大弯矩。

# 6 第六次作业

## 6.1 就能量释放率准则而言，在线性弹性情况和弹塑性情况均有效，但对两种情况在能量推导上最大的区别是什么？

对于玻璃、陶瓷等理想脆性材料，我们使用线弹性模型就可以描述其断裂特性，但是对于金属等韧性材料，即进入了非线性断裂的范畴，相比之下，非线性断裂会发生幂律硬化的现象，此时我们在进行能量计算的时候，需要考虑裂纹尖端的塑性区。对于线弹性情况，能量密度也可以直接使用应力与应变乘积的一半进行描述，而对于非线性问题，需要进行积分运算。

## 6.2 J 积分守恒性成立的条件是什么？

应力和应变单值对应；小变形；无体力。

## 6.3 为什么说弹塑性断裂的能量释放率准则与裂纹尖端张开位移准则是等效的？

是因为在 Dugdale 模型假设下，能量释放率与裂纹尖端张开位移成比例。

# 7 第七次作业

## 7.1 简述推导裂纹尖端弹塑性应力应变渐近场的步骤。

首先给出 I 型和 II 型裂纹的平面应变、幂硬化情况的基本关系，得到应力-应变曲线以及一般情况本构关系，进而列出变形协调方程、裂纹面不受力的边界条件。之后利用对称与反对称条件简化模型计算。对于多变量联立的一阶的方程，使用龙格-库塔法求解应力函数的渐近解。求出角分布函数，再利用 J 积分确定系数，最后得到渐进解。

## 7.2 裂纹尖端弹塑性渐近解的重要意义是什么？

该渐近解在裂纹尖端附近区域趋向真实解，该解答提供了可作为断裂准则的有效参量且可测。并且有了该解答，可以提供简洁的形式供人们使用。

## 7.3 试回答由下列叠加法确定裂尖弹塑性尖端场系数（J-积分）的方法是否正确，为什么？

在线弹性问题中是可以使用的。但是在弹塑性框架下，在小范围屈服情况是正确的，因为此时裂尖周围存在  $K$  场，其保证了外部的叠加原理成立；在大范围屈服情况不正确，因为完全的非线性变形叠加原理不成立。

# 8 第八次作业

## 8.1 试证明坐标原点改变后，该渐近解也适用于弹塑性材料的裂尖弹性区

从极坐标角度看，裂纹尖端渐近解是满足力学基本方程（几何方程、平衡方程、本构关系）和裂纹面边界条件以及裂纹前方对称条件的长度角度分离变量解（首项）。在坐标原点改变后，基本方程仍然满足，对于边界条件，仍为从  $-\pi$  到  $\pi$  积分一圈的，就此而言，坐标原点在裂尖处的渐近解形式与在裂尖前方  $r = R$  处的  $r > R$  区的渐近解，具有相同的形式。

## 8.2 什么是特征线？特征线的物理意义是什么？

特征线是材料受力变形后的最大剪应力线或剪应变线、主应力线或主伸长线等具有明确物理意义的线均可被称为特征线。其中最大剪应力/剪应变对应的就是滑移线，线的两侧的材料有较大的运动差异，可以在实验中观测到。尤其是对于弱硬化的材料，例如纯铜纯铝，在单向拉伸中，可以观

测到明显的大致 45 度滑移线。但是在实验中主应力线不是特别明显的观测到，但是便于判断，比如单向拉伸中拉伸方向即为主应力线。

### 8.3 在硬化材料的裂尖场中，无明显的特征线，而在弱硬化材料特别是理想塑性材料的裂尖场中，存在明显的特征线及特征区，试分析可能的原因。

对于弱硬化材料，其中塑性变形占主导因素，由于塑性变形不可压缩，会发生塑性流动，其中会分区域，总体变形协调约束，易发生剪切流动，进而会有一些特性突变的区域，因此会观测到滑移线等。

而对于有明显硬化效应的，弹性变形不可忽略，此时弹性变形与塑性变形共同发生，体积会发生变化，不会趋近于体积不可压缩，体积变化相对自由，不会发生一些明显的分区域（间断）现象。

### 8.4 试从下列理想刚塑性材料的速率应力协调关系

已知

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (8.4.1a)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (8.4.1b)$$

由于有

$$v_x = v_\alpha \cos \theta - v_\beta \sin \theta, \quad (8.4.2a)$$

$$v_y = v_\alpha \sin \theta - v_\beta \cos \theta, \quad (8.4.2b)$$

则分别沿着滑移线方向与主应力方向，有

$$dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0, \quad (8.4.3a)$$

$$dv_\beta - v_\alpha d\theta = 0. \quad (8.4.3b)$$