计算题

求解等效泛函

1.
$$\begin{cases} EA\dfrac{d^2u}{dx^2}+ax=0 \\ u(0)=0 \\ \dfrac{du}{dx}(L)=0 \end{cases}$$

(1). 写出等效泛函

(2) 有限元法求解 / 基于根据方程求解

试或者有何要求?

解: (1)

$$\delta\Pi=\int_0^L\left[EA\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+ax\right]\cdot\delta u\,dx=0.$$

注意到:
$$\int_0^L\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\delta u\,dx$$

$$=-\int_0^L u_x\cdot\delta u_x\,dx+\left[\frac{du}{dx}\cdot\delta u\right]_0^1.$$

利用边界条件:
$$\begin{cases}\delta u=0 & \text{when } x=0\\ \dfrac{du}{dx}=0 & \text{when } x=L\end{cases}$$

化简有 $\Rightarrow-\int_0^L u_x\cdot\delta u_x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\delta\int(u_x)^2dx.$$

那么有:

$$\delta\Pi=\delta\int_0^L\left(-\frac{1}{2}EA\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+aux\right)dx=0.$$

因此相应的泛函为:

$$\Pi=\int_0^L\left(-\frac{1}{2}EA\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+aux\right)dx$$

here. $u\in V_u:\{u\mid u(x=0)=0\}$.

求解等效泛函

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\phi-x=0 \\ \phi=0 \quad x=-1 \\ \phi=1 \quad x=1 \end{cases}$$

$x_1 \quad \xi \quad x_2$

$\xi=-1 \qquad \xi=1$

1) 等效泛函

2) 写出形函. J.

3) 写出刚度矩阵. 载荷列阵

计算：

1 1) 等效泛函：

$$\Pi=\int_0^1\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\phi^2-\phi x\right]dx$$

2) $x_1 \quad \xi \quad x_2$

$\xi=-1 \qquad \xi=1$

取线性单元：

$$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi) \quad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\{a^e\}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix},\ N=[N_1,N_2]$$

$$x=N_1x_1+N_2x_2$$

$$\because J=\frac{dx}{d\xi}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)=\frac{1}{2}L$$

3) $\phi=[N]\{a^e\}$

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{d\phi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{2}{L}\frac{d}{d\xi}[N]\{a^e\}=\frac{1}{L}[-1,1]\{a^e\}$$

代入泛函

$$\Pi^e=\frac{1}{2}\{a^e\}\int_{-1}^1\left[\frac{1}{L^2}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}(-1,1)-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-\xi)\\ \frac{1}{2}(1+\xi)\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}(1-\xi),\frac{1}{2}(1+\xi)\right)\right]\frac{L}{2}d\xi\{a^e\}^T$$

$$+\int_0^1\phi x\,dx$$

单刚

$$[K^e]=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}(1-\xi)^2&(1-\xi^2)\\1-\xi^2&(1+\xi)^2\end{bmatrix}\right)\cdot\frac{L}{2}d\xi.$$

$$=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}-\frac{L}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

荷载矩阵：

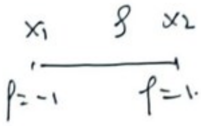
$$\{P^e\}=\cancel{\int_0^1\phi x\,dx}=\int_{-1}^1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-\xi)\\ \frac{1}{2}(1+\xi)\end{bmatrix}\cdot\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{L}{2}\xi\right]\cdot\frac{L}{2}d\xi$$

$$=\frac{L}{8}\cdot\begin{bmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{2L}{3}\\ \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2L}{3}\end{bmatrix}.$$

(x1+x2)/2应为2(x1+x2)

计算：

1. $$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} + \phi - x = 0 \\ \phi = 0 \quad x = -1 \\ \phi = 1 \quad x = 1. \end{cases}$$



(1). 写出变分泛函 (2) 写出形函数. J.

(3). 写出刚度矩阵 载荷矩阵.

解： (1). $\delta\Pi = \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi - x\right) \delta\phi \, dx$

其中：

$$\int_{-1}^{1} \phi'' \delta\phi \, dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \phi' \cdot \delta\phi' \, dx + \underbrace{[\phi' \cdot \delta\phi]_{-1}^{1}}_{} = 0 \leftarrow \delta\phi = 0.$$

$$= -\int_{-1}^{1} \phi' \delta\phi' \, dx = -\frac{1}{2}\delta\int_{-1}^{1} (\phi')^2 \, dx$$

因此 $\delta\Pi = \delta\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}\phi^2 - \phi x\right] dx$

$\Rightarrow \Pi = \int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi^2 - \phi x\right] dx$

here $\phi \in V_\phi = \{\phi \mid \phi = 0 \text{ when } x = -1 \text{ or } 1\}$.

(2). 1d 线性单元

$N_1 = -\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-\rho + 1)$.

$N_2 = \frac{1}{2}(\rho + 1)$, $\quad J = \frac{dx}{d\rho} = \frac{x_2 - x_1}{\rho_2 - \rho_1} = 1$

$J = 1$. (完全保持坐标不变……).

(3). 求刚度矩阵及载荷矩阵.

$\phi = [N]\{\phi^e\}$. 作插值.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\{\phi^e\}.$$

$$= [J]^{-1}\cdot \frac{d}{d\xi}[N]\{\phi^e\}. \qquad 其中\ J=1.$$

那么

$$= \frac{d}{d\xi}[N]\{\phi^e\}.$$

$$= \left[-\frac{1}{2}、\frac{1}{2}\right]\left\{\phi^e\right\}$$

那么、代入二次泛函有:

$$\cancel{\Pi^e = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}}$$

$$dx = J\,d\xi = d\xi.$$

$$\Pi^e = \int_e \left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi^2 - \phi x\right] dx.$$

$$= \int_e \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi^2 - \phi x\right] d\xi$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right)\cdot\{\phi^e\}^T\cdot\{\phi^e\}\, d\xi.$$

$$+ \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cdot\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-\xi+1) \\ \frac{1}{2}(\xi+1)\end{Bmatrix}\left\{\frac{1}{2}(-\xi+1), \frac{1}{2}(\xi+1)\right\}, \{\phi^e\}^T\{\phi^e\}\, d\xi.$$

$$- \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-\xi+1) \\ \frac{1}{2}(\xi+1)\end{Bmatrix}\cdot\xi\ \{\phi^e\}\ d\xi.$$

考察 Ω^e 中的各项，则有：

$$\text{单刚}\ [K^e] = \int_{-1}^{1} -\frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \left\{ -\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \right\} \right) d\xi$$

$$+ \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-\xi+1) \\ \frac{1}{2}(\xi+1) \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{2}(1-\xi),\ \frac{1}{2}(1+\xi) \right\} d\xi$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{单载}\ \{P^e\} = \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{Bmatrix} \cdot \xi \, d\xi$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}. \end{Bmatrix}$$

故最后可构造有限元方程：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_e^1 \\ \phi_e^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}.$$

拉格朗日乘子法与罚方法

2.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

约束：$u_1 = \frac{1}{k}$.

用Lagrange乘子法或罚函数方法求解上述方程.

解：若使用Lagrange乘子法. 则

$$L = \Pi + \lambda \cdot R$$

$$= \frac{1}{2} u^T \cdot K \cdot u + \lambda \cdot \left(u_1 - \frac{1}{k}\right).$$

考察λ的物理意义？（见作业2.）.

首先让我们考虑一个线性方程组：

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.2 & -3.3 \\ 1.2 & 6.0 & 1.9 \\ -3.3 & 1.9 & 4.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 2.1 \\ 0.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

这样一个方程显然有解：

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 1.72769 \\ -0.798162 \\ 1.42934 \end{Bmatrix}$$

该方程可以类比有限元中组装完成后的总刚和荷载列向量并通过消去法施加约束后的方程。如果，因为某些原因，导致我们希望在模型上施加一些额外的自由度之间的约束，例如这里我们想要对 u_1 和 u_2 两个自由度施加一组约束方程(1)为：

$$-1.2u_1 + 0.5u_2 = -2.0$$

这时候就可以采用拉格朗日乘子法，或者罚方法来施加约束。此时求出的自由度是满足约束方程条件下的势能泛函的极值点，也被称为拉格朗日条件极值。

拉格朗日乘子法

先将约束方程中缺少的自由度补充完整，得：

$$-1.2u_1 + 0.5u_2 + 0.0u_3 = -2.0$$

写出约束方程的系数矩阵：

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} -1.2 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$
$$f = -2.0$$

然后可以得到考虑约束后的刚阵和右端项：

$$\mathbf{K}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^\mathrm{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.2 & -3.3 & -1.2 \\ 1.2 & 6.0 & 1.9 & 0.5 \\ -3.3 & 1.9 & 4.7 & 0.0 \\ -1.2 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{F}_\lambda = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.1 \\ 0.0 \\ -0.5 \\ -2.0 \end{Bmatrix}$$

此时可以解出：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_\lambda^{-1} \mathbf{F}_\lambda = \begin{Bmatrix} 1.40723 \\ -0.622654 \\ 1.13338 \\ -0.21235 \end{Bmatrix}$$

这个解是满足约束方程(1)的。其中拉格朗日乘子自由度的值表示约束内力。

罚方法

采用罚方法施加约束方程(1)，首先仍然写出系数矩阵：

$$
\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} -1.2 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{Bmatrix}
$$
$$
f = -2.0
$$

将罚系数取为一个较大的数，一般可以取刚度最大元素的1e6倍，例如本例取为：

$$
p = 10^7
$$

则罚方法的刚度矩阵和右端项为：

$$
\mathbf{K}_p = \mathbf{K} + p\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.2 & -3.3 \\ 1.2 & 6.0 & 1.9 \\ -3.3 & 1.9 & 4.7 \end{bmatrix} + 10^7 \begin{bmatrix} 1.44 & -0.6 & 0.0 \\ -0.6 & 0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}
$$
$$
\mathbf{F}_p = \mathbf{F} + pf\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 2.1 \\ 0.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} + 10^7 \times (-2.0) \begin{Bmatrix} -1.2 \\ 0.5 \\ -0.0 \end{Bmatrix}
$$

同样可以求得：

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{F}_p = \begin{Bmatrix} 1.40723 \\ -0.622654 \\ 1.13338 \end{Bmatrix}
$$

罚方法得到的解只是近似的满足约束方程，这里贴出软件算出的罚方法的结果：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 1.4072275746568566 \\
u_2 &= -0.6226538632934947
\end{aligned}
$$

其与约束方程的误差为：

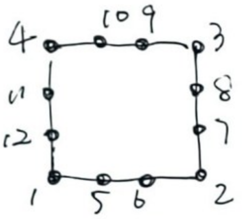
$$
g = -1.2u_1 + 0.5u_2 - (-2.0) = -2.1235 \times 10^{-8}
$$

该误差乘以罚系数则得到拉格朗日乘子的值：

$$
\lambda = gp = -0.21235
$$

正方形以及任意形状的单元，形函数是几次

3.



正方形以及任意形状的单元

形函数是几次？【3.6 插值 2】.

解：对于图示单元，属于3次Serendipity单元，则形函数为：

角节点：$N_i = \frac{1}{32}(1+\xi_0)(1+\eta_0)[9(\xi^2+\eta^2)-10]$ $(i=1.2.3.4)$

边中节点：$N_i = \frac{9}{32}(1+\xi_0)(1-\eta^2)(1+9\eta_0)$

$(\xi_i=\pm1.\quad \eta_i=\pm\frac{1}{3},\quad i=7.8.11.12)$

$N_i = \frac{9}{32}(1+\eta_0)(1-\xi^2)(1+9\xi_0).$

$(\xi_i=\pm\frac{1}{3},\quad \eta_i=\pm1.\quad i=5.6.9.10).$

设计利用共轭法梯度法，在不组集点总刚度矩阵的情况下的求解过程

4. 大型矩阵求解格式，不组集总刚。利用共轭梯度法设计求解位移的过程？[redacted] 4. 线性问题的解法 [redacted]

答：共轭梯度法将线性方程的求解问题转化成二次型的极值（最值）问题，是无约束优化算法的一种。

$$\begin{cases} Ax_* = b \Leftrightarrow \varphi(x_*) = \min\limits_{x} \varphi(x) \\ \varphi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \end{cases}$$

共轭梯度法在最速下降法的基础上作进行修正，基于的给出迭代方向 p_k，防止最速下降法中"之字形"等问题，从而获得更好的计算效果。

方案设计：共轭梯度法(CG)迭代过程

见课件114页。

(1) 输入 A, b, 初值 x_0

$x = x_0$; $r := b - Ax_0$; $\rho_0 := r^T r$

$k := 1$.

(2) 如果 $k=1$ 则 $p := r$. 否则：

$\beta := \rho_{k-1} / \rho_{k-2}$, $p := r + \beta p$

(3) $w = Ap$; $\alpha := \rho_{k-1} / (p^T w)$; $x := x + \alpha p$

$r := r - \alpha w$; $\rho_k = r_k^T r_k$

(4) 如果 $\rho_k < \rho_0 \varepsilon$，则输出 x

否则 $k := k+1$, 转回 (2).

3.1 局部刚度矩阵

每个单元 e 都有一个局部刚度矩阵 K^e。对于每个单元 e，刚度矩阵 K^e 通过以下积分计算得到：

$$K^e = \int_{\Omega^e} B^T D B \, d\Omega$$

其中，B 是应变-位移矩阵，D 是材料的弹性矩阵。

3.2 矩阵-向量乘积

在每次迭代过程中，需要计算 $K\mathbf{p}_k$。我们通过以下步骤实现这一计算：

1. 初始化向量 $\mathbf{y} = 0$。
2. 对每个单元 e：
   - 提取单元 e 的节点编号集 $\{i_e\}$。
   - 提取当前方向矢量 $\mathbf{p}_k$ 在这些节点上的分量，形成局部向量 $\mathbf{p}_k^e$。
   - 计算局部乘积：

   $$\mathbf{y}^e = K^e \mathbf{p}_k^e$$

   - 将局部乘积 $\mathbf{y}^e$ 加回全局向量 $\mathbf{y}$ 的相应位置：

   $$y_{i_e} \leftarrow y_{i_e} + \mathbf{y}^e$$

4. 迭代过程

在迭代过程中，结合共轭梯度法的基本步骤和上面描述的矩阵-向量乘积计算过程，我们可以用数学语言描述如下：

初始化：

1. 选择初始解：

$$\mathbf{u}_0 = 0$$

2. 计算初始残差：

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \sum_e K^e \mathbf{u}_0^e$$

3. 设置初始方向：

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$$

迭代步骤 $k = 0, 1, 2, \ldots$**：**

1. 计算步长：

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \left(\sum_e K^e \mathbf{p}_k^e\right)}$$

2. 更新解：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

3. 更新残差：

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \left(\sum_e K^e \mathbf{p}_k^e\right)$$

4. 检查收敛条件：

如果 $\|\mathbf{r}_{k+1}\|$ 足够小，则停止迭代。

5. 计算新的方向矢量：

$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$$

6. 更新搜索方向：

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$$

5. 总结

通过上述步骤，我们描述了如何在不显式组装全局刚度矩阵的情况下，利用共轭梯度法求解有限元方程组。这个方法特别适用于大规模稀疏矩阵的求解，能够有效利用稀疏性，节省存储空间并提高计算效率。

用两种方法离散 Fourier 热传导定律（-K ∇T=q）。

方法一：有限差分法（Finite Difference Method, FDM）

有限差分法是一种直接的数值方法，通过使用差分近似来替代偏导数。

1. 离散化区域

假设我们在一个二维区域上求解热传导问题，将区域划分为网格点 (i, j)，每个网格点的间距为 Δx 和 Δy。

2. 差分近似

对于傅里叶热传导定律 $-K\nabla T = q$，在二维情况下：

$$-K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = q$$

使用中心差分公式对二阶偏导数进行离散化：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

将其代入热传导方程：

$$-K\left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\right) = q_{i,j}$$

简化后得到离散方程：

$$-K\left(\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - 2T_{i,j}\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\right) = q_{i,j}$$

这个方程可以用于每个内部网格点 (i, j) 的计算。

3. 形成代数方程组

将所有内部节点的离散方程写成矩阵形式，得到线性方程组：

$$A\mathbf{T} = \mathbf{Q}$$

其中，$\mathbf{T}$ 是温度的向量，$\mathbf{Q}$ 是热源项的向量，A 是系数矩阵。

4. 求解代数方程组

使用数值方法（如Gauss消元法、共轭梯度法等）求解线性方程组，得到每个网格点的温度值 $T_{i,j}$。

万法二：有限元法（Finite Element Method, FEM）

有限元法是一种基于变分原理的数值方法，通过将区域划分为有限个小单元，并在每个单元上使用基函数来近似解。

1. 建立弱形式

对于傅里叶热传导定律 $-K\nabla T = q$，弱形式为：

$$\int_\Omega K\nabla T \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega qv \, d\Omega$$

其中，Ω 是问题区域，v 是测试函数。

2. 划分区域

将区域划分为有限个单元（例如三角形或四边形单元），并在每个单元上选取适当的基函数（如线性基函数或二次基函数）。

3. 组装单元刚度矩阵和载荷向量

对于每个单元 e，计算单元刚度矩阵 K^e 和单元载荷向量 f^e：

$$K^e = \int_{\Omega^e} K\nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega$$
$$f^e = \int_{\Omega^e} qN_i \, d\Omega$$

其中，N_i 和 N_j 是单元上的基函数。

4. 组装整体刚度矩阵和载荷向量

将所有单元的刚度矩阵和载荷向量组装成整体系统：

$$K = \sum_e K^e$$
$$f = \sum_e f^e$$

5. 施加边界条件

根据实际问题施加适当的边界条件（如Dirichlet边界条件或Neumann边界条件）。

6. 求解代数方程组

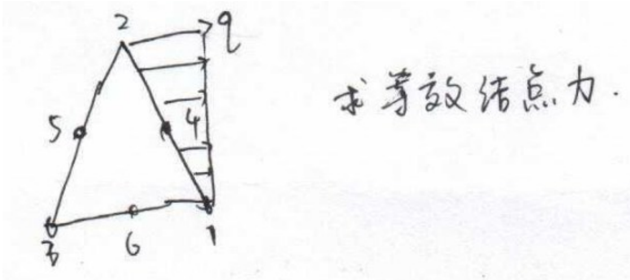
使用数值方法求解整体系统的代数方程组：

$$K\mathbf{T} = \mathbf{f}$$

得到每个节点的温度值 T_i。

微分方程与等效泛函、形函数、刚度矩阵、载荷列阵（拉格朗日求解）

求等效节点力



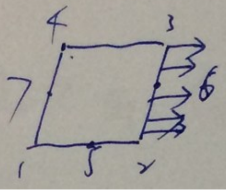
①

$$\frac{d\phi}{dx} = Q - x.$$ 求泛函.

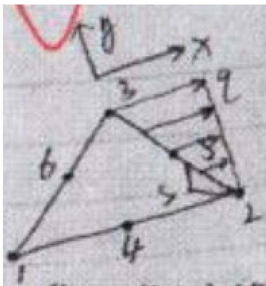
$\phi(0)=\phi(1)=0$ 用拉格朗日乘子法引入边界条件 并设 $Q = a_0 + a_1x + a_2x^2$

求 a_0, a_1, a_2.

②



求等效节点力.(其中6节点不在中点).



求等效节点力

$$T=\begin{bmatrix}\xi q\\0\end{bmatrix}$$

解 在2 3边界取局部坐标 ξ

易得形函数 $N_1=N_4=N_6=0$

$N_2=(2\xi-1)(\xi-1)$

$N_5=4(1-\xi)\xi \quad N_3=\xi(2\xi-1)$

$$P_2=\int_l\begin{bmatrix}N_2&0\\0&N_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi q\\0\end{bmatrix}t\,ds$$

$$=\int_l\begin{bmatrix}(2\xi-1)(\xi-1)\xi\,qt\\0\end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$P_5=\int_l\begin{bmatrix}N_5&0\\0&N_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi q\\0\end{bmatrix}t\,ds$$

$$=\int_l\begin{bmatrix}4(1-\xi)\xi\cdot\xi qt\\0\end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}qlt\\0\end{bmatrix}$$

$$P_3=\int_l\begin{bmatrix}N_3&0\\0&N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi q\\0\end{bmatrix}t\,ds$$

$$=\int_l\begin{bmatrix}(2\xi-1)\xi\cdot\xi qt\\0\end{bmatrix}ds$$

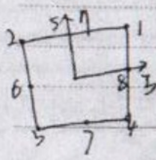
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}qlt\\0\end{bmatrix}$$

Jacobi 矩阵。证明四边形单元八节点和四节点的等参元变换 Jacobi 矩阵一样

$[K][U]=[P]$

当存在线性约束时，存在线性约束的节点的节点力表为 $[P_s]=[K_s][U]$，其中 $[K_s]$ 为线性弹簧的刚度矩阵，记其它无线性约束的节点的节点力为 $[P']$，对于 $[P']$ 中，线性约束节点位置的取值均为0，因此有 $[K][U]=[P']+[K_s][U]$

移项得 $\{[K]-[K_s]\}[U]=[P]$



证明四节点和八节点的等参变换雅可比矩阵相等

解 易得1-4节点的形函数为

$N_i=\frac{1}{4}(\xi_0\xi+1)(\eta_0\eta+1)(\xi_0\xi+\eta_0\eta-1)$

其余4个节点的形函数为

$N_5=\frac{1}{2}(\xi+1)(-\xi+1)(\eta+1)$

$N_6=\frac{1}{2}(-\xi+1)(-\eta+1)(\eta+1)$

$N_7=\frac{1}{2}(\xi+1)(-\xi+1)(-\eta+1)$

$N_8=\frac{1}{2}(\xi+1)(-\eta+1)(\eta+1)$

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{4}\eta$

$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{4}\eta$

$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}\eta^2-\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{4}\eta$

$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\eta^2-\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{4}\eta$

$\frac{\partial N_5}{\partial \xi}=-\eta\xi-\xi$ $\quad \frac{\partial N_6}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{2}$

$\frac{\partial N_7}{\partial \xi}=\eta\xi-\xi$ $\quad \frac{\partial N_8}{\partial \xi}=-\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{2}$

$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{4}\xi$

$\frac{\partial N_2}{\partial \eta}=-\frac{1}{2}\eta\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{4}\xi$

$\frac{\partial N_3}{\partial \eta}=-\frac{1}{2}\eta\xi-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{4}\xi$

$\frac{\partial N_4}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\eta\xi-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{4}\xi$

$\frac{\partial N_5}{\partial \eta}=-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial N_6}{\partial \eta}=\eta\xi-\eta$

$\frac{\partial N_7}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial N_8}{\partial \eta}=-\eta\xi-\eta$

由于5,6,7,8结点均为边中点，因此有 $x_5=\frac{x_1+x_2}{2}$ $y_5=\frac{y_1+y_2}{2}$ $x_6=\frac{x_2+x_3}{2}$ $y_6=\frac{y_2+y_3}{2}$

$x_7=\frac{x_3+x_4}{2}$ $y_7=\frac{y_3+y_4}{2}$ $x_8=\frac{x_1+x_4}{2}$ $y_8=\frac{y_1+y_4}{2}$

因此有

$J_{11}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i=$

$\frac{1}{4}(\eta+1)x_1-\frac{1}{4}(\eta+1)x_2+\frac{1}{4}(\eta-1)x_3+\frac{1}{4}(1-\eta)x_4$

$J_{21}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i=$

$\frac{1}{4}(\xi+1)x_1+\frac{1}{4}(1-\xi)x_2+\frac{1}{4}(\xi-1)x_3-\frac{1}{4}(\xi+1)x_4$

$J_{12}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i=$

$\frac{1}{4}(\eta+1)y_1-\frac{1}{4}(\eta+1)y_2+\frac{1}{4}(\eta-1)y_3+\frac{1}{4}(1-\eta)y_4$

$J_{22}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i=$

$\frac{1}{4}(\xi+1)y_1+\frac{1}{4}(1-\xi)y_2+\frac{1}{4}(\xi-1)y_3-\frac{1}{4}(\xi+1)y_4$

五、证明四边形单元

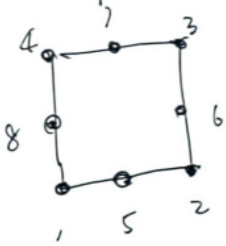
8结点等参元和4结点形函数（亚参元）的Jacobi一样。

解：Jacobi Matrix 指出了两个单元之间的变换和映射关系。对于平面单元 dim=2，则有：

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}.$$

(1)

考察8结点单元：若为亚参元，那么在坐标变换时一般取小于8的结点数，如取 $m=4$，那么



$$\begin{cases} x=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,x_i \\ y=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,y_i \end{cases}$$

其中，$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\cancel{(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)}$

那么 $[J]=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}(1+\eta_i\eta)\xi_i(2\xi_0+\eta_0) \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$

？这中不相等客观——

(2) 考察4结点等参元：

[解] 坐标变换：

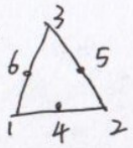
$$\begin{cases} x=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,x_i \\ y=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,y_i \end{cases}$$

形函数 $N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ $(i=1,2,3,4)$.

那么 $[J]=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta)x_i, & \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta)y_i \\ \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)x_i, & \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)y_i\end{bmatrix}$.

证明三角形单元 6 节点的 Jacobi 矩阵是常数阵

4.证:



$$N_1 = L_1(2L_1-1)$$

$$N_2 = L_2(2L_2-1)$$

$$N_3 = (2L_3-1)L_3.$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_1L_3$$

其中 $L_1 = \frac{A_1}{A} = \cancel{\frac{1}{2A}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}}\ \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}(a_1+b_1x+c_1y)$

$$L_2 = \frac{1}{2A}(a_2+b_2x+c_2y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A}(a_3+b_3x+c_3y).$$

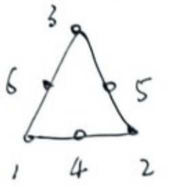
$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}$, $\frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}$

由于 N_i 为二次

$\therefore$ ~~$\frac{\partial N_i}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ 均为常数~~,

所以对应的 Jacobi 阵~~为常数~~阵.
不是

4. 证明 Jacobi Matrix 是常数矩阵



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_4 \\ x_1 + x_3 = 2x_6 \\ x_2 + x_3 = 2x_5 \end{cases}$$

y也是同理

解：形函数：

$$\begin{cases} N_1 = (2L_1-1)L_1 \\ N_2 = (2L_2-1)L_2 \\ N_3 = (2L_3-1)L_3 \\ N_4 = 4L_1L_2 \\ N_5 = 4L_2L_3 \\ N_6 = 4L_3L_1 \end{cases}$$

考察局部独立坐标，2d问题，不妨选择

L_1 L_2 作为独立坐标。

则 $L_3 = 1 - L_1 - L_2$

那么 $[J] = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \right]$ $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ 中 x → 全局坐标，ξ → 局部坐标。

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}.$$

其中：
$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{6} N_i(L_1, L_2)\, x_i \\ y = \sum_{i=1}^{6} N_i(L_1, L_2)\, y_i \end{cases}$$

那么 $J_{11} = \frac{\partial x}{\partial L_1} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \cdot x_i$

$= (4L_1-1)x_1 + (4L_1+4L_2-3)x_3 + 4L_2x_4 - 4L_2x_5 - 4L_1x_6$

$= x_1 - x_3.$

同理 $J_{22} = y_2 - y_3$　　$J_{12} = y_1 - y_3$

$J_{21} = x_2 - x_3.$

四节点四边形单元

对于四节点四边形单元，形状函数 N_i 是线性的：

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

八节点四边形单元

对于八节点四边形单元，形状函数 N_i 是二次的：

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_5(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

弹簧刚度为 k，方向余弦 l，m，n 三个方向的平动自由度，写出单元刚度矩阵。

弹簧刚度矩阵的构造依赖于弹簧在不同方向上的刚度。我们考虑一个三维空间中的弹簧，其在节点 i 和节点 j 之间，弹簧刚度为 k，方向余弦分别为 l, m, n 对应 x, y, z 方向。

方向余弦 l, m, n 是指弹簧方向在各坐标轴上的投影比，即：

$l = \cos(\alpha)$
$m = \cos(\beta)$
$n = \cos(\gamma)$

其中，α, β, γ 分别是弹簧方向与 x, y, z 轴的夹角。

单元刚度矩阵推导

对于一个三维弹簧单元，其刚度矩阵 k_e 是 6×6 的矩阵，因为每个节点有三个自由度（沿 x, y, z 方向）。

首先，我们在局部坐标系下构造弹簧的刚度矩阵。对于一个弹簧单元，其局部刚度矩阵（仅考虑一维弹簧的情况）为：

$$k_{local} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

在三维空间中，这个刚度需要投影到全局坐标系中。我们需要使用方向余弦来进行坐标变换。方向余弦可以构成一个变换矩阵 $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

因为我们需要构造 6×6 的全局刚度矩阵，我们考虑两个节点的自由度排列如下：

节点 i 的自由度：$[u_{i_x}, u_{i_y}, u_{i_z}]$
节点 j 的自由度：$[u_{j_x}, u_{j_y}, u_{j_z}]$

所以变换矩阵 $\mathbf{T}$ 实际上是：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

为了得到 6×6 的全局刚度矩阵，我们将 $\mathbf{T}$ 扩展：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

但是，为了在全局坐标系中表示，刚度矩阵还需要更进一步扩展和重组。实际上，我们应该使用 3×3 的方向余弦矩阵进行三维变换。定义 $\mathbf{R}$ 为方向余弦矩阵：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}$$

全局刚度矩阵为：

$$k_{global} = \mathbf{T}^T k_{local} \mathbf{T}$$

首先，我们将 k_{local} 扩展为三维：

$$k_{local} = k \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中，$\mathbf{I}$ 是 3×3 的单位矩阵。

方向余弦矩阵 $\mathbf{T}$ 为：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

完整的变换矩阵为：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

计算全局刚度矩阵 k_{global}：

$$k_{global} = \mathbf{T}^T k_{local} \mathbf{T}$$

将其代入，我们得到：

$$k_{global} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix}^T k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix}$$

展开矩阵乘法：

$$k_{global} = k \begin{bmatrix} l & m & n & -l & -m & -n \\ -l & -m & -n & l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & n & -l & -m & - \\ -l & -m & -n & l & m & \end{bmatrix}$$

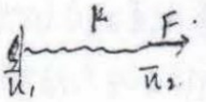
结果是一个 6×6 矩阵：

$$k_{global} = k \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

该刚度矩阵描述了在三维空间中任意方向上的平动自由度弹簧单元的刚度关系。

1. 局部坐标下弹簧单刚

对杆件，有 $\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$



弹簧 有 $\frac{EA}{l}=k$. $k\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\end{bmatrix}$

局部坐标下的单刚.

$$\bar{K} = k\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bar{a} \qquad \bar{a} = \begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{v}_1\\ \bar{w}_1\\ \bar{u}_2\\ \bar{v}_2\\ \bar{w}_2\end{bmatrix}$$

$\bar{K}\bar{a} = \bar{b}$. 记 $\tilde{T} = \begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}$

有 $\underbrace{\bar{b}}_{\text{局部坐标节点力}} = T \underbrace{b}_{\text{整体坐标节点力}}$ $\quad T = \begin{bmatrix}\tilde{T} & 0\\ 0 & \tilde{T}\end{bmatrix}$ $\quad \bar{a} = Ta$

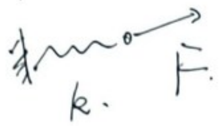
$a = \begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ w_1\\ u_2\\ v_2\\ w_2\end{bmatrix}$

$T^T = T^{-1}$ $\cancel{\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}}$

$\Rightarrow k = T^T \bar{K} T$

$$= k\begin{bmatrix}l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 & -l_1^2 & -l_1m_1 & -l_1n_1\\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 & -l_1m_1 & -m_1^2 & -m_1n_1\\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 & -l_1n_1 & -m_1n_1 & -n_1^2\\ -l_1^2 & -l_1m_1 & -l_1n_1 & l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1\\ -l_1m_1 & -m_1^2 & -m_1n_1 & l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1\\ -l_1n_1 & -m_1n_1 & -n_1^2 & l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2\end{bmatrix}$$

6. 弹簧刚度k. 方向余弦 l.m.n. 的单向自由度.



写出单刚：

解：属于耦合自由度的约束问题.

耦合约束方程：

$$\{A\}^T\{u\} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = S.$$

~~耦合约束~~：假设节点编号为i. 其沿x.y.z方向位移分别为 u_i^x u_i^y u_i^z. 则有：

$$k(u_i^x\cdot l + u_i^y\cdot m + u_i^z\cdot n) = F.$$

即：

$$\begin{Bmatrix} kl \\ km \\ kn \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} = F.$$

若采用罚函数法.

$$\underbrace{\alpha\{A\}\{A\}^T}_{\text{单刚}}\cdot\{u\} = \underbrace{\alpha\cdot S\cdot\{A\}}_{\text{单载}}.$$

$$k^e = \alpha\begin{Bmatrix} kl \\ km \\ kn \end{Bmatrix}\{kl\ \ km\ \ kn\}. \qquad f^e = \alpha\cdot F\cdot\begin{Bmatrix} kl \\ km \\ kn \end{Bmatrix}$$

对号入座集成总刚中

计算离散的∇v？

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot v)\delta^{\alpha\beta}$$

由 $\begin{cases} \nabla\cdot f(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j)\cdot\nabla_i W_{ij} \\ f(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij} \end{cases}$ 可知。

$$\varepsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \varepsilon_i^{\alpha\beta} W_{ij}$$

$$\frac{\partial v_i^\beta}{\partial x_i^\alpha} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\beta \nabla_i^\alpha W_{ij}$$

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i^\beta} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} (\nabla_i^\beta W_{ij}) v_{ij}^\alpha$$

$$(\nabla\cdot v) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}\cdot\nabla_i W_{ij}$$

整理则有：

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \varepsilon_j^{\alpha\beta} W_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\beta \nabla_i^\alpha W_{ij} + \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} (\nabla_i^\beta W_{ij}) v_{ij}^\alpha - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}\cdot\nabla_i W_{ij}\, \delta^{\alpha\beta}$$

SPH 光滑长度自适应推导粒子类方程？

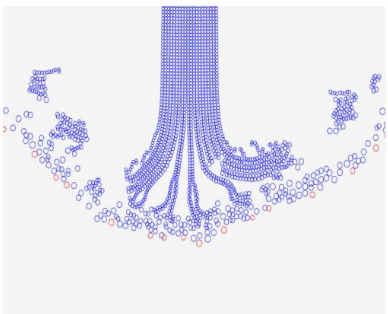
➢ 光滑函数—光滑长度自适应

Model 1 – According to density variation

$$h = h_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/d}$$

Model 1 – According to density time change rate

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{d}\frac{h}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$



试推导$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot v)\delta^{\alpha\beta}$的 SPH 离散形式。

2、进行SPH离散，得

$$\frac{\partial v_i^\beta}{\partial x^\alpha}=\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{v_j^\beta}{\rho_j}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha},$$

$$\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x^\beta}=\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{v_j^\alpha}{\rho_j}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta},$$

$$(\nabla\cdot\vec{v})\delta^{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{v_j}{\rho_j}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}\delta^{\alpha\beta}$$

∴ SPH离散形式为

$$\varepsilon_i^{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\left(v_j^\beta\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}+v_j^\alpha\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}-\frac{2}{3}v_j\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}\delta^{\alpha\beta}\right)$$

证明此方程的微分算子是自伴随的，并建立相应的自然变分原理

1、某问题的微分方程是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+C\phi+Q=0 \quad 在\Omega内$$

边界条件是 $\phi=\bar{\phi}$（在Γ_1上），$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\bar{q}$（在$\Gamma_2$上），其中C和Q是坐标的函数，试证明此方程的微分算子是自伴随的，并建立相应的自然变分原理。

解 $\int_\Omega \delta\phi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+(C\phi+Q)\right)-\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right)\delta\phi\, d\Gamma$

$=\int_\Gamma\left(\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)-\int_\Omega\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)d\Omega$

$\quad+\int_\Omega\left(C\delta\phi\cdot\phi+Q\cdot\delta\phi\right)d\Omega-\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right)\delta\phi\, d\Gamma$

$=\int_\Omega\left(-\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+(C\delta\phi\,\phi+Q\delta\phi)\right)+\int_{\Gamma_2}\bar{q}\,\delta\phi\, d\Gamma$

$\quad+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\, d\Gamma$

$\Pi=\int_\Omega\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}(C\phi^2+Q\phi)\right)d\Omega$

问题的泛函，试决定欧拉方程，并识别自然边界条件和强制边界条件

1.) 问题的泛函为

$$\Pi(\phi)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2-Q\phi\right]d\Omega-\int_{\Gamma_q}\left(\frac{1}{2}\alpha\phi^2-\bar{q}\phi\right)d\Gamma$$

其中 $k, \alpha, Q, \bar{q}$ 仅是坐标的函数，试决定欧拉方程，并识别 Γ_q 上的自然边界条件和 $\Gamma-\Gamma_q$ 上的强制边界条件

$$\delta\Pi(\phi)=\int_\Omega\left(k\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+k\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}-Q\delta\phi\right]d\Omega-\int_{\Gamma_q}(\alpha\delta\phi\,\phi-\bar{q}\delta\phi)d\Gamma$$

$$\to\Gamma\to\Gamma_q+\Gamma_\phi$$

$$\delta\Pi(\phi)=\int_\Gamma\left(k\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+k\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$-\int_\Omega\left(k\delta\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+k\delta\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+Q\delta\phi\right)d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_q}(\alpha\delta\phi\cdot\phi-\bar{q}\delta\phi)d\Gamma$$

欧拉方程 $k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+Q=0$

Γ_q 自然边界 $k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\alpha\phi+\bar{q}=0$

Γ_ϕ 强制边界 $k\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$

从 Wilson 非协调形函数推导出的满足小片检验的非协调函数（作业四第四题）

$$
\left.
\begin{aligned}
N_{\lambda1}^{*} &= (1-\xi^2) + \frac{2}{3}\left(\frac{J_1}{J_0}\xi - \frac{J_2}{J_0}\eta\right) \\
N_{\lambda2}^{*} &= (1-\eta^2) - \frac{2}{3}\left(\frac{J_1}{J_0}\xi - \frac{J_2}{J_0}\eta\right)
\end{aligned}
\right\} \tag{3.5}
$$

式中系数可由单元的 Jacobi 行列式定义如下

$$|\boldsymbol{J}| = J_0 + J_1\xi + J_2\eta = (a_1b_3 - a_3b_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)\xi + (a_2b_3 - a_3b_2)\eta$$

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix}
= \frac{1}{4}
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}
$$

推导 Irons 小片检验准则的数学形式（作业四第五题）

5. 非协调单元位移场：$u^h = u_c + u_n$（协调+非协调）

应变场：$\varepsilon^h = \varepsilon_c + \varepsilon_n = \frac{1}{2}(\nabla u_c + \nabla u_c^T) + \frac{1}{2}(\nabla u_n + \nabla u_n^T)$

常应变．$u^0 = a + B^0 x$．ε^0 为常

应变能正交：$\int_\Omega \varepsilon^0 : \varepsilon_n \, d\Omega = 0 \quad \forall \varepsilon^0$，$\int_\Omega \varepsilon^0 : \nabla u_n \, d\Omega = 0$.

非协调基函数条件，设 $u_n = \sum \phi_i \alpha_i$.

ϕ_i 需满足 $\int_\Omega \nabla \phi_i \cdot P_k \, d\Omega = 0 \quad \forall k$；$\int_{\partial\Omega} (C\varepsilon^0) : \vec{n} \cdot \phi_i \, dS = 0 \quad \forall \varepsilon^0$.

综上，

Irons 小片检验准则：① $\int_\Omega \nabla \phi_i : P_k \, d\Omega = 0$（∀常应变基函数$P_k$）

② $\int_{\partial\Omega} \hat{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \phi_i \, dS = 0$（∀常应力$\vec{\sigma_0}$）