

# 《非线性有限元方法》期末大作业

张家瑞 2401111734

## 目录

1 介绍.....	2
2 程序结构.....	2
2.1 划分网格（generate_mesh 函数） .....	3
2.2 设置边界条件（boundary_conditions 函数） .....	3
2.3 设置材料参数（main 程序中） .....	3
2.4 计算质量矩阵（lumped_mass、consistent_mass 函数） .....	3
2.5 显式计算时间步（Time_step 函数） .....	4
2.6 显式计算（explicit_solver 函数） .....	4
2.7 内力计算（fint_vector 函数） .....	5
2.8 本构关系（constitutive 函数） .....	5
3 结果分析.....	7
3.1 自编程序计算结果.....	7
3.2 商业软件 Abaqus 计算结果.....	12
3.3 结果对比.....	14
4 收获与展望.....	14

# 二维大变形弹塑性动力学问题

## 1 介绍

本次介绍的 MATLAB 程序，可以实现二维大变形弹塑性动力学问题的求解。默认假设材料遵循 J2 各向同性塑性法则。目前能够实现的可调节功能有：模拟单元的设置、网格划分节点数的设置、单元类型的选取、边界条件的设置。

## 2 程序结构

该代码的主要结构为：网格划分与处理、设置边界条件、设置材料属性、计算形函数及其导数、计算质量矩阵、设置显式计算的时间步、显式计算（根据本构关系计算内力以及材料状态）、后处理。整体流程图如图 1 所示。

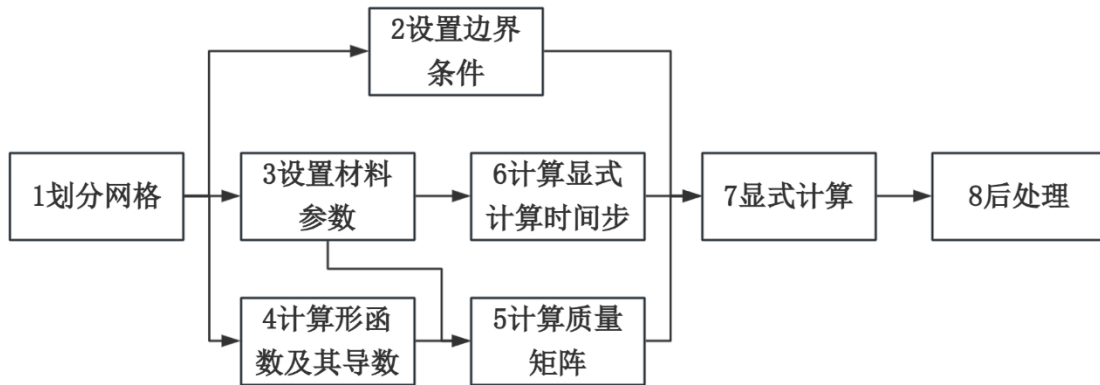


图 1 二维大变形弹塑性动力学问题 MATLAB 代码流程图

相较于期中作业，本次最大的不同在于计算质量矩阵、显式计算。其中计算质量矩阵将在后文中具体程序部分进行介绍。在此处先梳理显式计算的逻辑框架（具体计算公式将在后文介绍）。

首先在给定边界条件后，确定初始的参数（因为 MATLAB 中计算步  $n$  从 1 开始的，在此保持统一），因此有  $x_1$ 、 $v_1$ 、 $a_1$ 、 $F_1^p$ ，其中  $F_1^p$  假设为单位张量。之后通过  $v_1$ 、 $a_1$  计算得到  $x_2$ ，进而根据新的位置求出每个单元变形梯度  $F_2$  和 Hencky 应变  $\varepsilon_2$ ，再根据上个时刻的塑性变形梯度  $F_1^p$  与塑性应变  $\varepsilon_1^p$ ，先假设没有塑性增量，求出一个 Mises 有效应力  $s_2^{\text{trial}}$ ，代入到屈服条件中进行判断，如果发生屈服，则需要计算塑性增量并更新塑性变形梯度（采用迭代算法）。再利用真实的塑性变形梯度  $F_2^p$  求解出弹性变形梯度  $F_2^e$ ，求解出弹性应变  $\varepsilon_2^e$ ，进而得到真实的应力张量  $\sigma_2$ ，再计算节点力  $f_2$ ，得到加速度  $a_2$ ，利用中心差分法得到速度  $v_2$ 。即完成一个迭代步的计算。

## 2.1 划分网格 (generate\_mesh 函数)

通过 generate\_mesh 函数实现网格的生成。在输入信息中，全局变量 flag 定义单元类型，当 flag=1 时为一次三角形单元；当 flag=2 时为双线性四边形单元。在函数中定义网格划分数 (nx 与 ny 分别为水平与垂直方向的划分数) 以及模拟单元的几何设置 (Lx 与 Ly 分别为水平与垂直方向的长度)。输出信息 x\_a 为节点的坐标、elem 为生成单元中的节点信息，这些参数在主程序中调用 generate\_mesh 函数时直接定义。其中节点的编号顺序为从先纵向后横向，单元中的节点编号为逆时针排列。在生成单元中节点信息时，先选取出四个节点，再根据类型定义为三角形或四边形单元。

## 2.2 设置边界条件 (boundary\_conditions 函数)

在本问题中，施加的边界条件分为位移边界条件与速度边界条件，其中输入信息包括节点坐标 x\_a，约束信息 x0、y0、v0，其中 x=x0 与 y=y0 的节点分别固定了水平方向与垂直方向的位移，全部节点施加了水平向左的速度 v0 (需要注意正负号)。输出信息包括位移约束 boundary，节点速度 velo。通过对指定的约束位置进行赋值来得到 boundary 与 velo。

## 2.3 设置材料参数 (main 程序中)

本问题为平面应力问题，材料参数的定义放于主程序中。通过 properties 来存储材料参数。

## 2.4 计算质量矩阵 (lumped\_mass、consistent\_mass 函数)

输入信息包括节点总数 nodes、问题维度 dim、单元信息 elem、形函数 N、单元面积 Area、密度 dens。输出信息为集中质量矩阵 lMass 与一致质量矩阵 cMass。其中一致质量矩阵计算公式为

$$M_e = \int_{V_e} N^T \rho N dV.$$

在主程序中，通过调整 alpha 控制两种质量矩阵的占比：

$$M = \alpha M_e + (1 - \alpha) M_l.$$

因为本问题的计算量不是特别大，为了直观的查看质量矩阵，采用了直接存储的方法，如果使用稀疏矩阵的存储方法，直接在子程序中修改对于矩阵的定义即可。

## 2.5 显式计算时间步 (Time\_step 函数)

通过 Time\_step 函数实现显式计算中的时间步长。输入信息包括单元面积 Area, 材料属性 E、nu 和 density, 单元类型 flag。输出信息为时间步长 time\_step。由于显式计算是一定收敛的, 但如果时间步长过大会导致计算不正确, 为了保证计算的稳定性, 设计了最大时间步长, 即

$$\Delta t \leq \alpha \frac{h_{\min}}{c},$$

其中  $h_{\min}$  为最小单元特征长度,  $c$  为剪切波速,  $\alpha$  为 CFL 安全系数, 一般设置为 0.1-0.5, 在本问题中设置为 0.1。剪切波速计算公式为

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

## 2.6 显式计算 (explicit\_solver 函数)

在本程序中进行显式计算, 输入信息包括质量矩阵 M、形函数导数 DN、单元面积 Area、时间积分变量 gamma、时间步长 time\_step、总计算步 final\_step、边界条件 boundary、节点坐标 x\_a、材料属性 properties、单元信息 elem、节点初速度 velo。输出信息为位移 u、每个节点的有效应力 sigeff、每个节点的塑性应变 epeff。

在求解中, 已知第  $n$  步的位移、速度、加速度, 可以得到  $n + 1$  步节点坐标为

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} [(1 - \beta)a_n + \beta a_{n+1}] \Delta t^2,$$

通过  $x_{n+1}$ , 调用 fint\_vector 函数可以求得  $f_{n+1}^{\text{int}}$ , 进而有加速度

$$a_{n+1} = M^{-1}(f_{n+1}^{\text{ext}} - f_{n+1}^{\text{int}}),$$

进而更新速度为

$$v_{n+1} = v_n + [(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}] \Delta t.$$

因为本问题为显式计算, 因此  $\beta = 0$ , 设定  $\gamma = 0.5$  为中心差分法。因此在显式计算子程序中, 通过时间积分循环得到下一步的信息。先计算出下一步的位置, 进而得到内力, 再计算出加速度, 最终得到速度, 完成一个时间步的计算。但是本问题为大变形弹塑性, 在计算内力时需要一定的技术处理。

## 2.7 内力计算（fint\_vector 函数）

在本程序中进行内力计算，输入信息包括节点坐标  $x_a$ 、形函数导数 DN、材料属性 properties、单元信息 elem、单元面积 Area、上一步塑性变形梯度  $F_p\_old$ 、上一步等效塑性应变  $EpEff\_old$ 。输出信息为节点力  $F\_int$ 、塑性应变  $epeff$ 、Misses 有效应力  $sigeff$ 、下一步的塑性变形梯度  $F_p\_next$ 、塑性应变张量  $epsilon\_p\_new$ 。特别注意的是，在计算时存储了所有单元的历史塑性变形梯度等信息，因此在调用的时候，需要利用 reshape 函数将梯度还原成矩阵的存储形式。

通过输入信息  $x_{n+1}$ ，可以得到变形梯度

$$F_{n+1} = x_{ia,n+1} \frac{\partial N_a}{\partial X_j}$$

通过调用本构关系 constitutive 子程序，可计算得到应力张量  $\sigma_{ij}$ ，进而得到内力

$$f_{ia}^{int} = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial X_j} dV,$$

将该内力返回到显式计算子程序中，完成时间步的计算。

## 2.8 本构关系（constitutive 函数）

在本程序中进行应力张量的计算，输入信息包括变形梯度  $F$ 、塑性变形梯度  $F_p\_n$ 、等效塑性应变  $EpEff\_n$ 、材料属性 properties。输出信息包括应力张量  $\sigma$ 、等效塑性应变  $EpEff$ 、等效应力  $SigEff$ 、下一步的塑性变形梯度  $F_p\_n1$ 、塑性应变张量  $eps\_p\_vec$ 。

在本子程序中，已知该时刻的塑性应变梯度和塑性应变，需要求解下一时刻的信息，首先假设没有塑性应变，则有  $F_{n+1}^p = F_n^p$ 、 $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p$ 。可以计算得到假设的下一步弹性应变梯度

$$F_{n+1}^e = F_{n+1} (F_n^p)^{-1},$$

进而得到 Hencky 应变

$$\epsilon_{n+1}^e = \frac{1}{2} \log(F_{n+1}^e F_{n+1}^{e,T}),$$

可以求得偏应变

$$e_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}^e),$$

进而有应力

$$s_{n+1}^e = 2\mu e_{n+1}^e,$$

可以得到 Mises 有效应力

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} s_{n+1}^e : s_{n+1}^e}.$$

通过屈服准则

$$\sigma_c = \sigma_0(1 + A\varepsilon^p)^\alpha,$$

判断材料是否发生屈服，如果发生屈服，即为有新的塑性增量，即通过牛顿迭代法，求解方程

$$\sigma_c(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}_n^p) - 3\mu \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \|\varepsilon_{n+1}^e\| - \Delta\bar{\varepsilon}_n^p \right) = 0,$$

则有塑性应变

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}_n^p,$$

且

$$\Delta\bar{\varepsilon}_n^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\bar{\varepsilon}_n^p \frac{s_{n+1}^e}{\|s_{n+1}^e\|},$$

之后更新塑性应变张量

$$F_{n+1}^p = \exp(\Delta\varepsilon_n^p) F_n^p.$$

进而得到下一步真实的弹性应变梯度

$$F_{n+1}^e = F_{n+1} (F_{n+1}^p)^{-1},$$

和真实 Hencky 应变

$$\varepsilon_{n+1}^e = \frac{1}{2} \log(F_{n+1}^e F_{n+1}^{e,T}),$$

求解出 Cauchy 应力

$$\sigma = \frac{1}{J} F_{n+1}^e S_{n+1}^e F_{n+1}^{e,T},$$

由于本问题为平面应变问题，则有

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

返回应力张量即可。

### 3 结果分析

改写程序后，按照 Problem 2 中的工况进行设置。边界条件施加为下表面约束纵向位移，左表面约束横向位移，全部节点施加向左的200m/s的速度。模拟使用的材料属性如表 1 所示。

表 1 材料属性

Young's modulus (GPa)	Poisson ratio	Density (Kg/m <sup>3</sup> )	Initial yield stress $\sigma_0$ (MPa)	Constant $A$	Power $\alpha$
100	0.3	8950	400	10	0.25

#### 3.1 自编程序计算结果

横向和纵向分别划分为 10 个网格，分别采用三角形与四边形单元，为了直观展示变形结果，变形放大因子  $h$  设置为 1。时间步长约为  $2 \times 10^{-8}$ s，则需观察 5, 10, 15, 20  $\mu$ s 的变形与应力情况，即观察 250、500、750、1000 的迭代步结果即可。

图 2-图 5 所示为三角形单元在四个时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图；图 6 图 9 所示为四边形单元在四个时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图。通过变形图我们可以观察到，整体的变形行为是符合预期的，左端受到了很大的挤压。随着时间的增加，塑性应变累计，且集中在左下的区域。同时，应力也集中在左下角的区域。

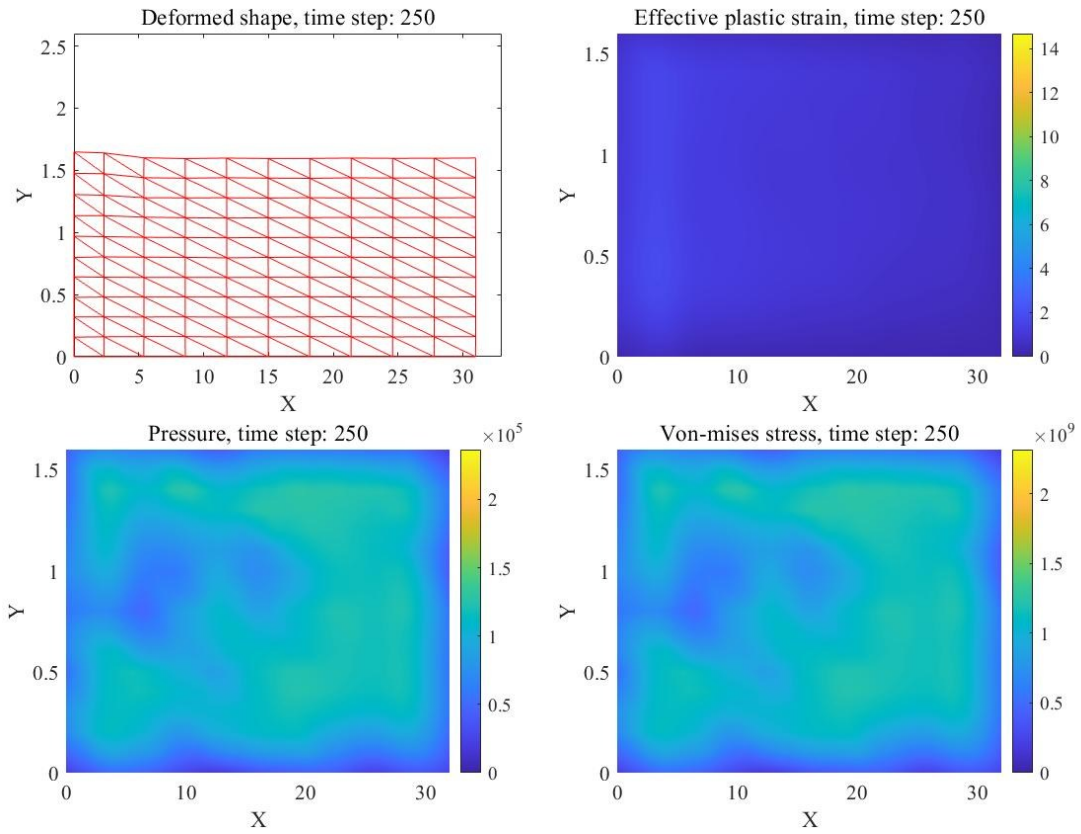


图 2 在 $5 \mu s$ 时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（三角形单元）

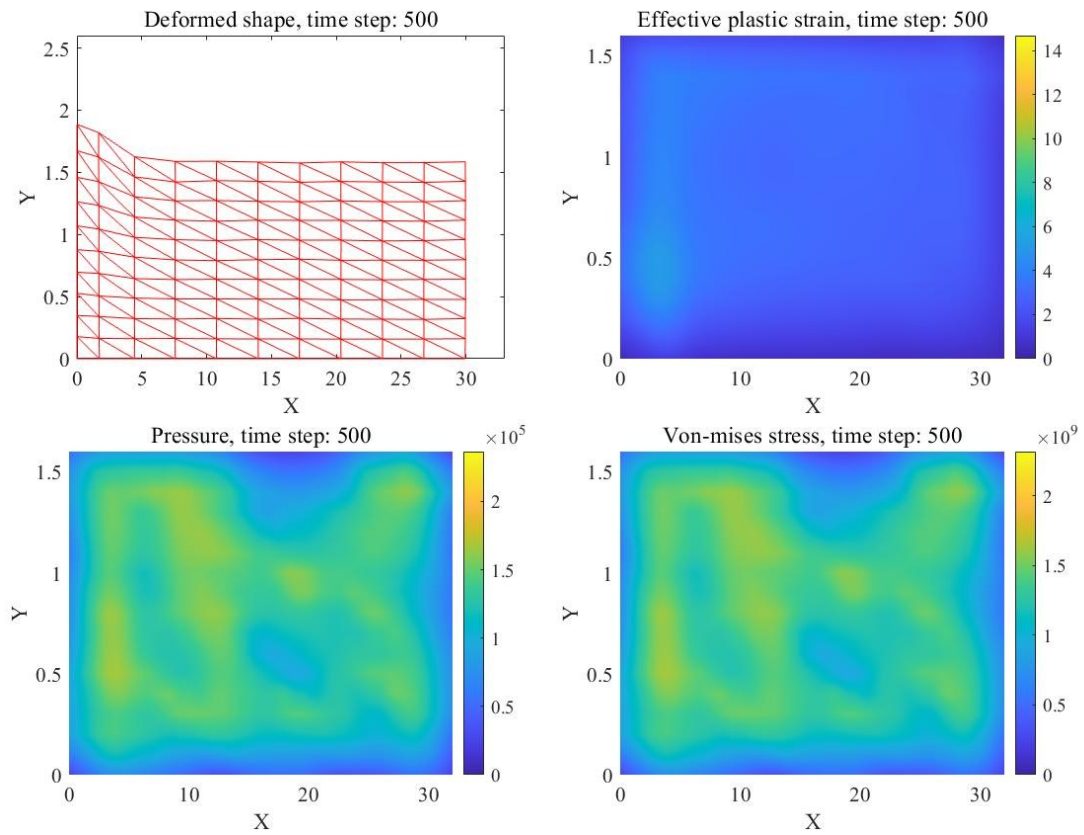


图 3 在 $10 \mu s$ 时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（三角形单元）

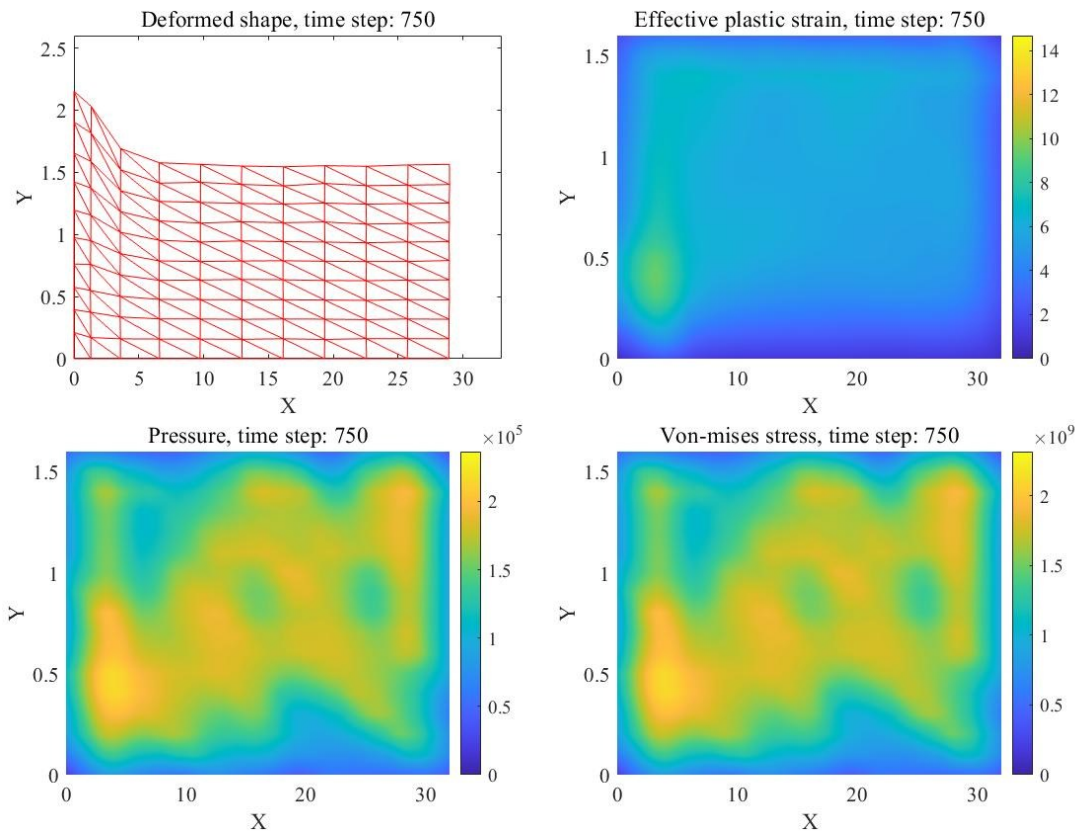


图 4 在  $15 \mu s$  时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（三角形单元）

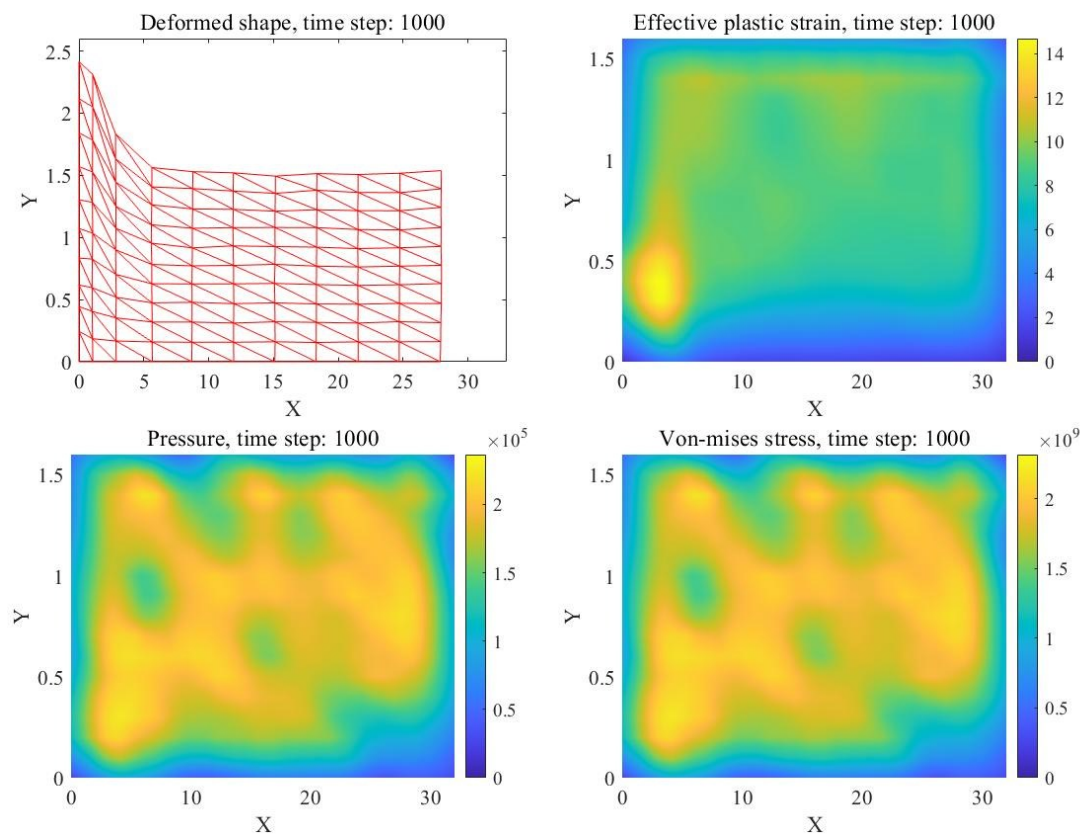


图 5 在  $20 \mu s$  时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（三角形单元）

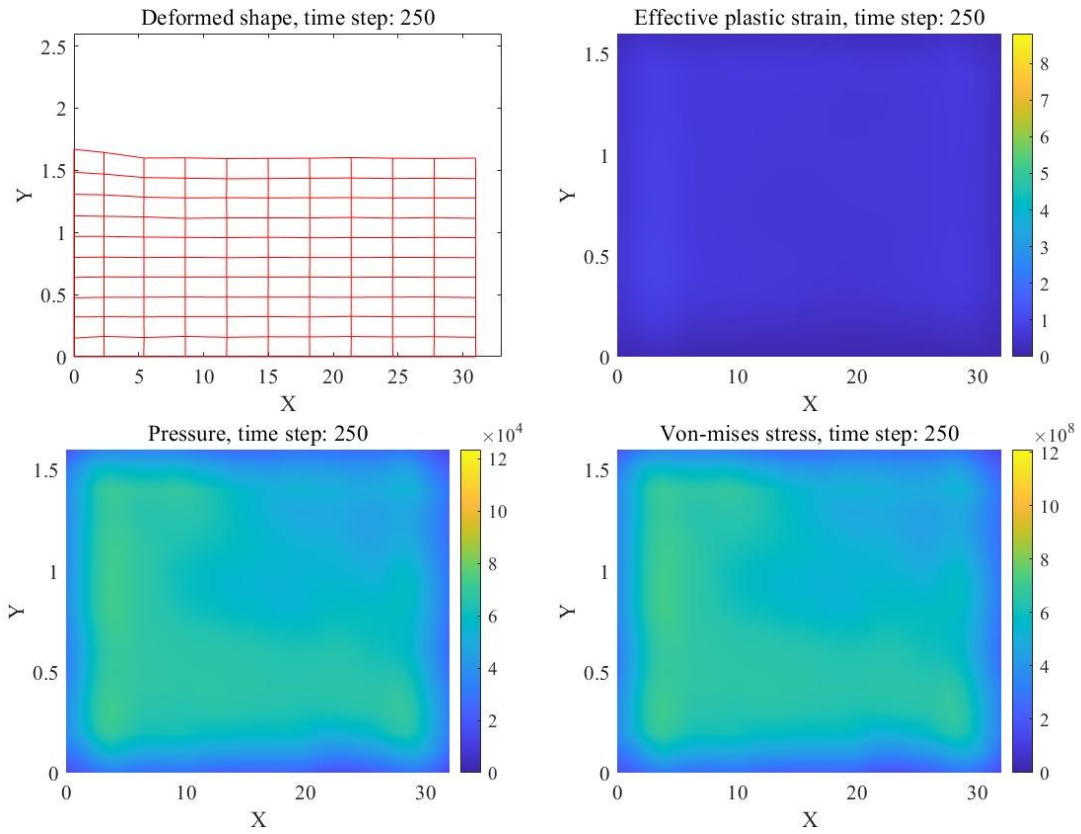


图 6 在 $5 \mu s$ 时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（四边形单元）

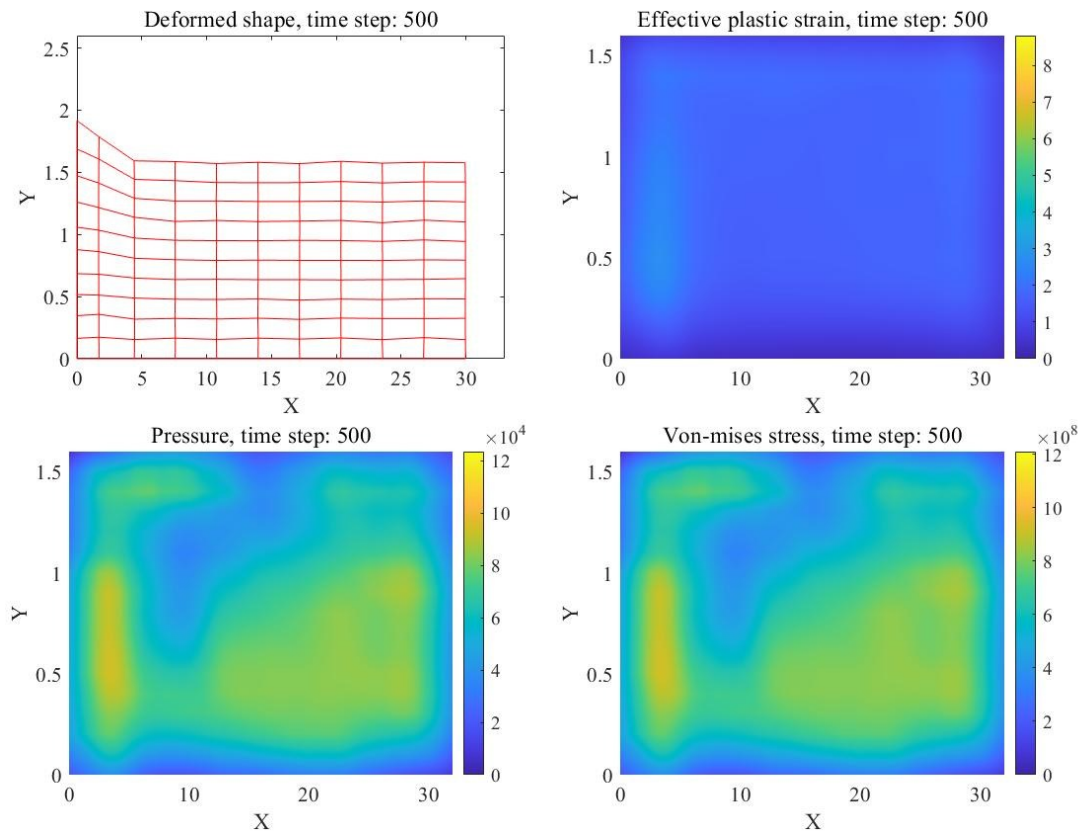


图 7 在 $10 \mu s$ 时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（四边形单元）

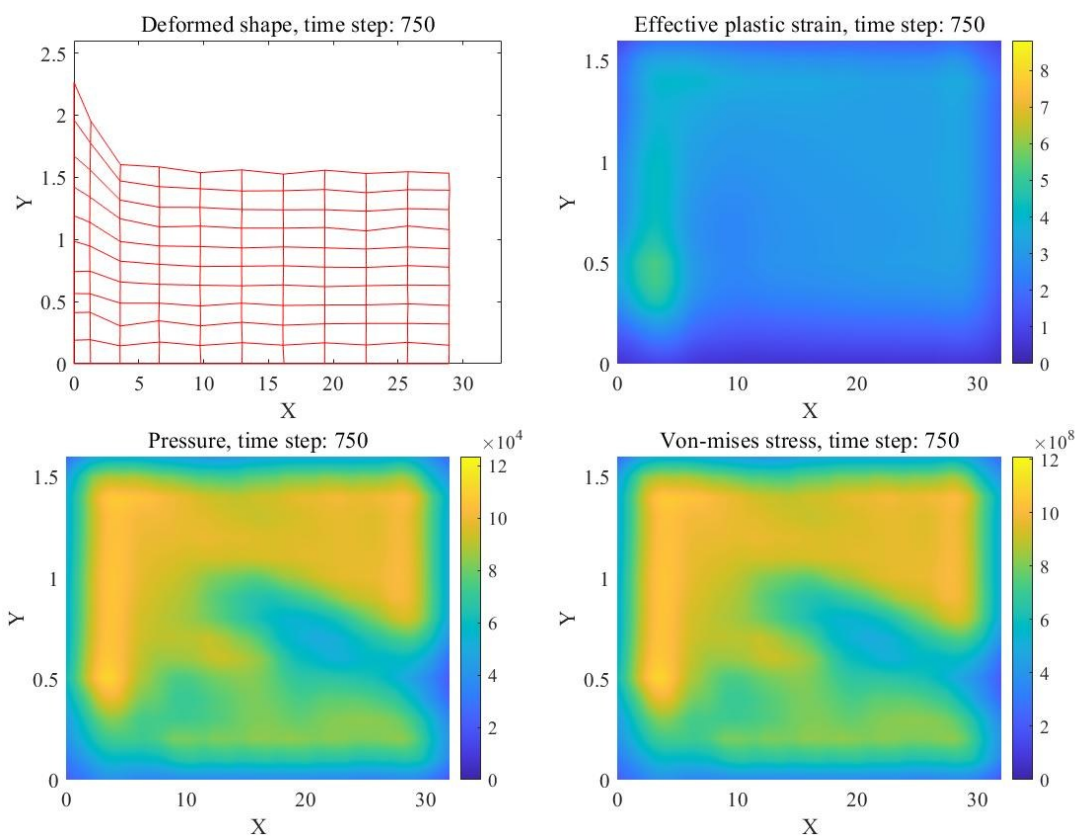


图 8 在  $15 \mu s$  时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（四边形单元）

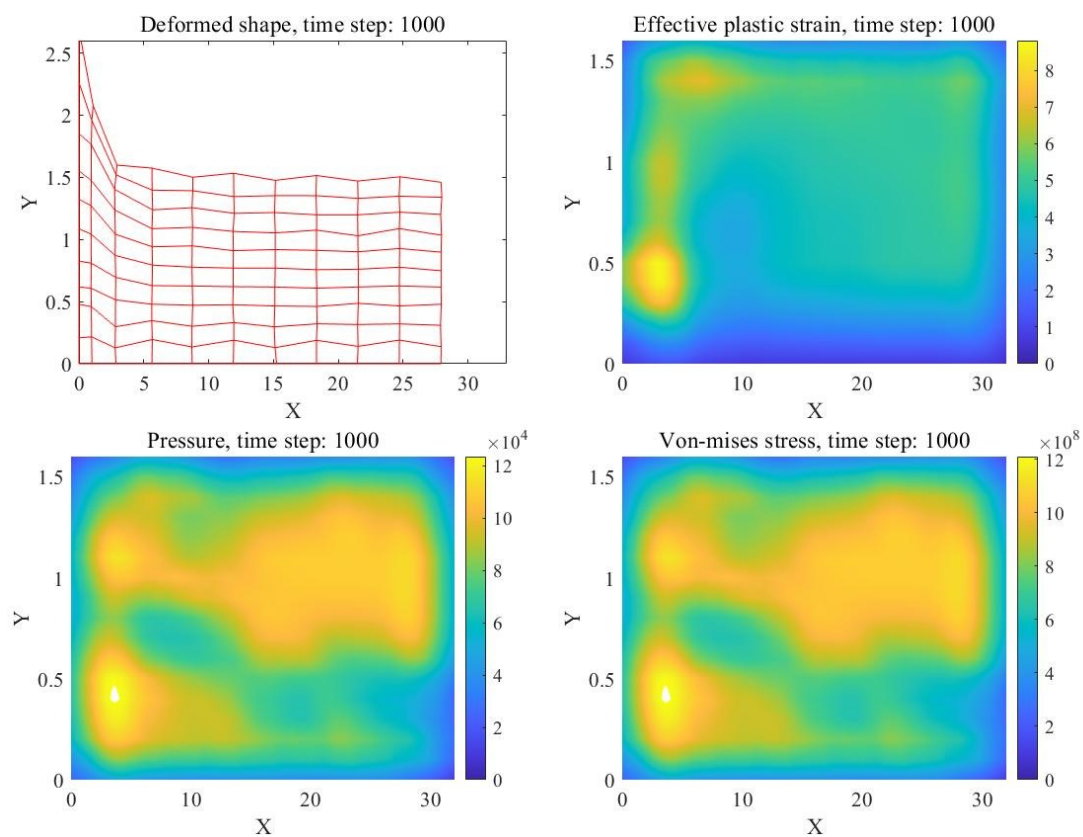


图 9 在  $20 \mu s$  时刻的单元变形图、有效塑性应变、压力、von-mises 应力云图（四边形单元）

接下来，分析左下角单元的应力与应变关系，结果如图 10 所示。我们可以发现，应力应变关系符合我们给出的 J2 各向同性塑性法则。

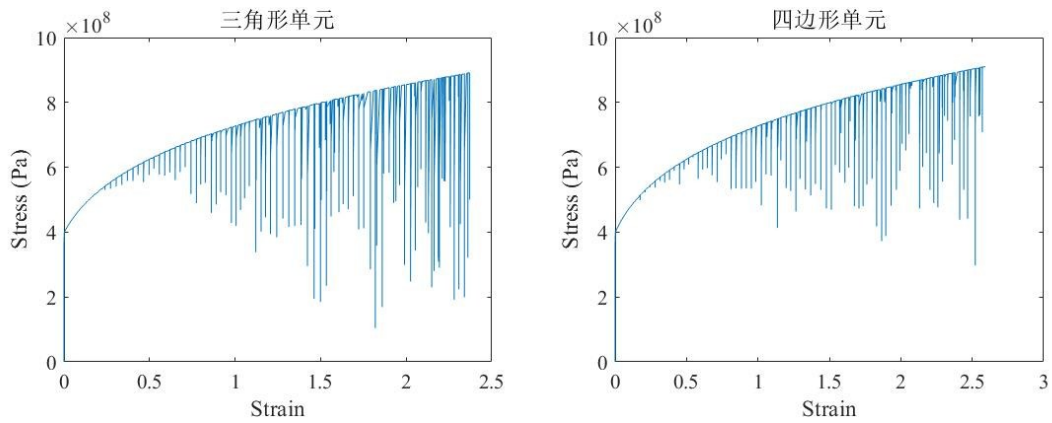


图 10 应力应变曲线

### 3.2 商业软件 Abaqus 计算结果

接下来，使用商业软件 Abaqus 进行模拟。模型建立与材料参数与前面相同。需要注意的是，因为 Abaqus 中没有 J2 各向同性塑性法则，需要我们进行手动定义。固定模型的左边的水平方向位移和下边的竖直方向位移，通过预定义场的方式施加初始速度。结果如图 11-图 14 所示。

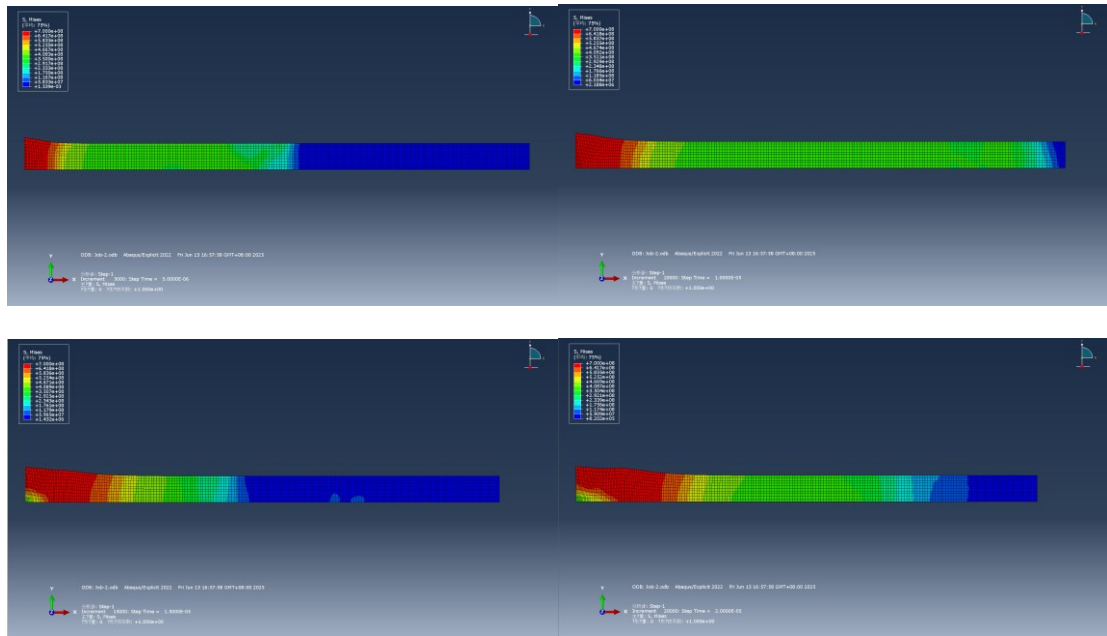


图 11 四个时刻的 von-mises 应力云图

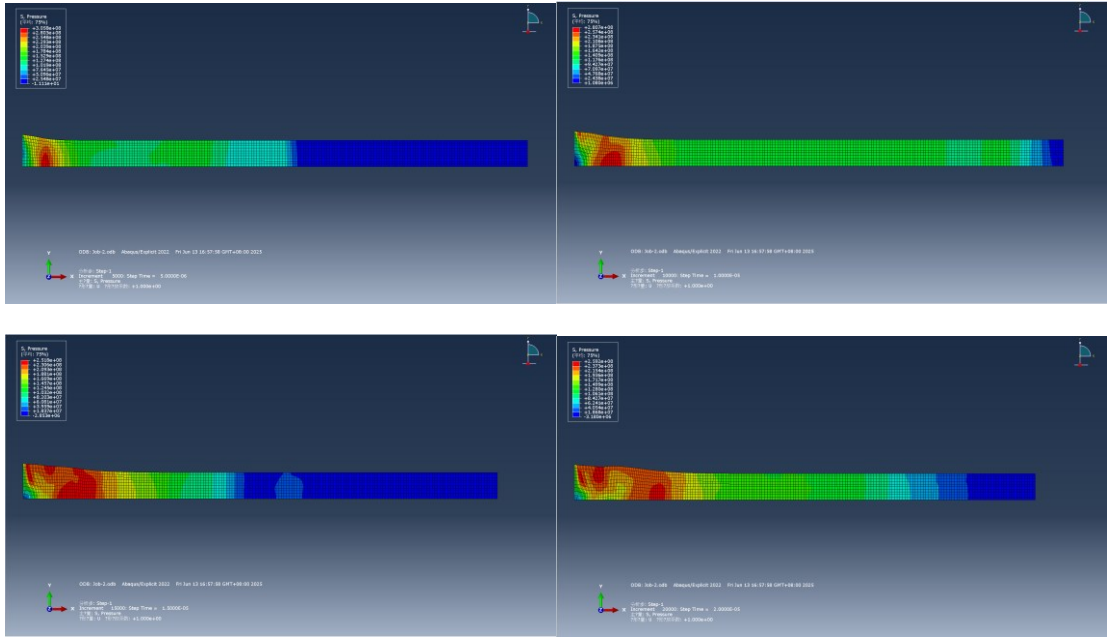


图 12 四个时刻的压力云图

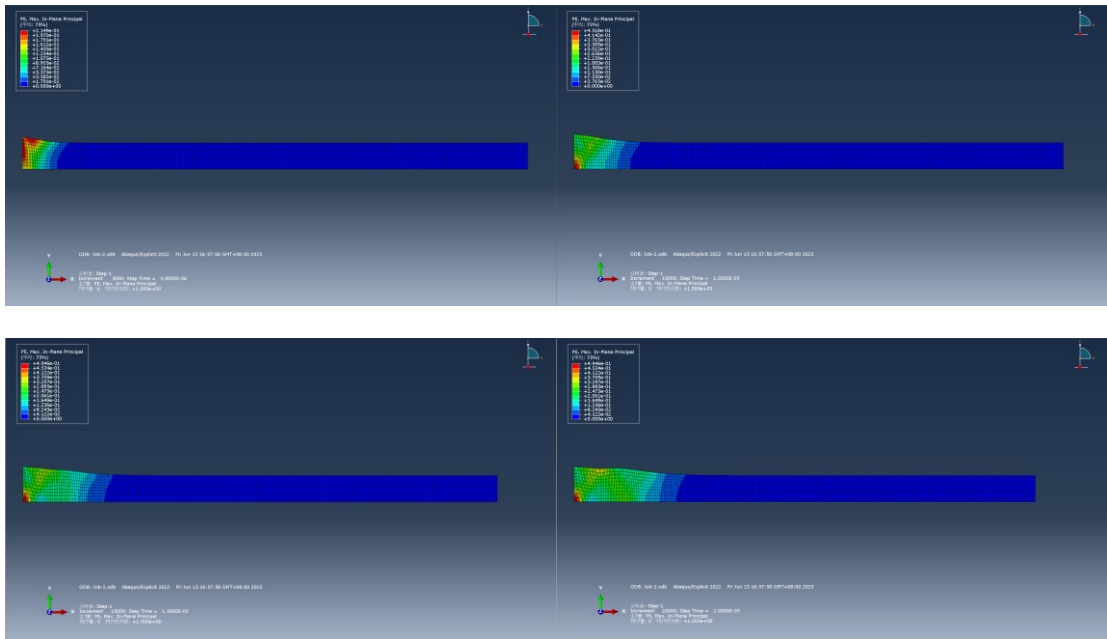


图 13 四个时刻的等效塑性应变云图

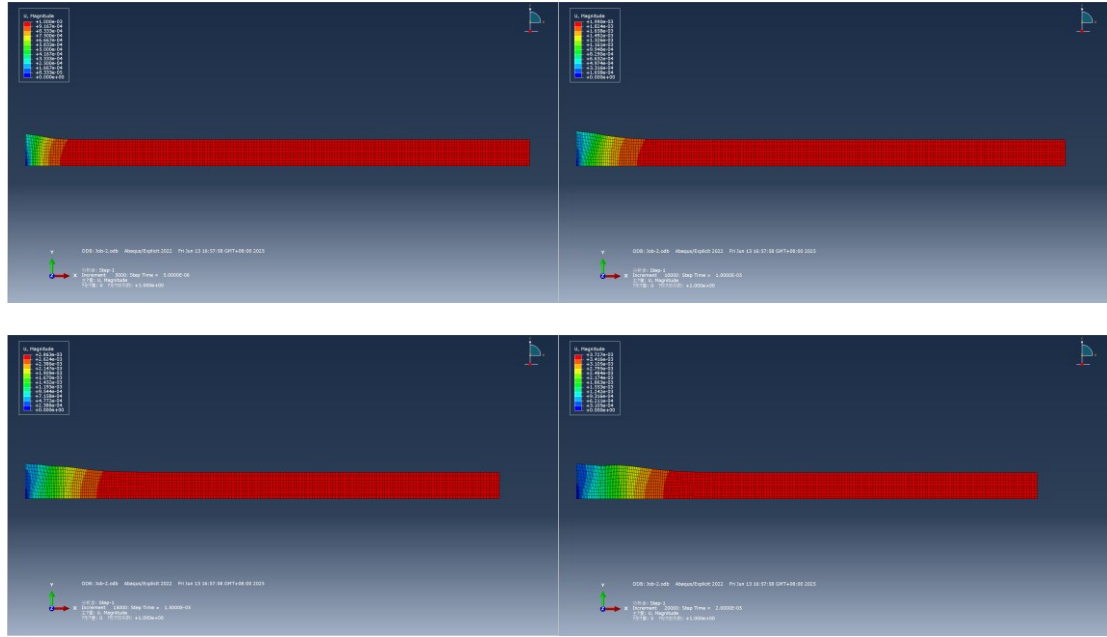


图 14 四个时刻的位移幅值云图

### 3.3 结果对比

通过对自编代码与大型软件 **Abaqus** 的结果进行对比，我们可以发现位移与等效塑性形变可以较好的对应，左上角区域存在较大的变形，且塑性应变集中发生在左端区域。但是应力的计算存在一定的问题。

## 4 收获与展望

虽然此次程序可以跑得通，并且定性的可以判断是正确的，但此次程序仍然有一些问题，对于应力的计算是有一定问题的，这也将之后进行改进。

通过此次编程并进行 **Abaqus** 模拟，我对非线性大变形问题的求解过程有了直观的了解。正是在不断发现问题、解决问题的过程中加深了对知识点的理解。并且我也相信在今后的科研中，这些内容的学习将会对我有很大的帮助，最后非常感谢黎老师和助教！